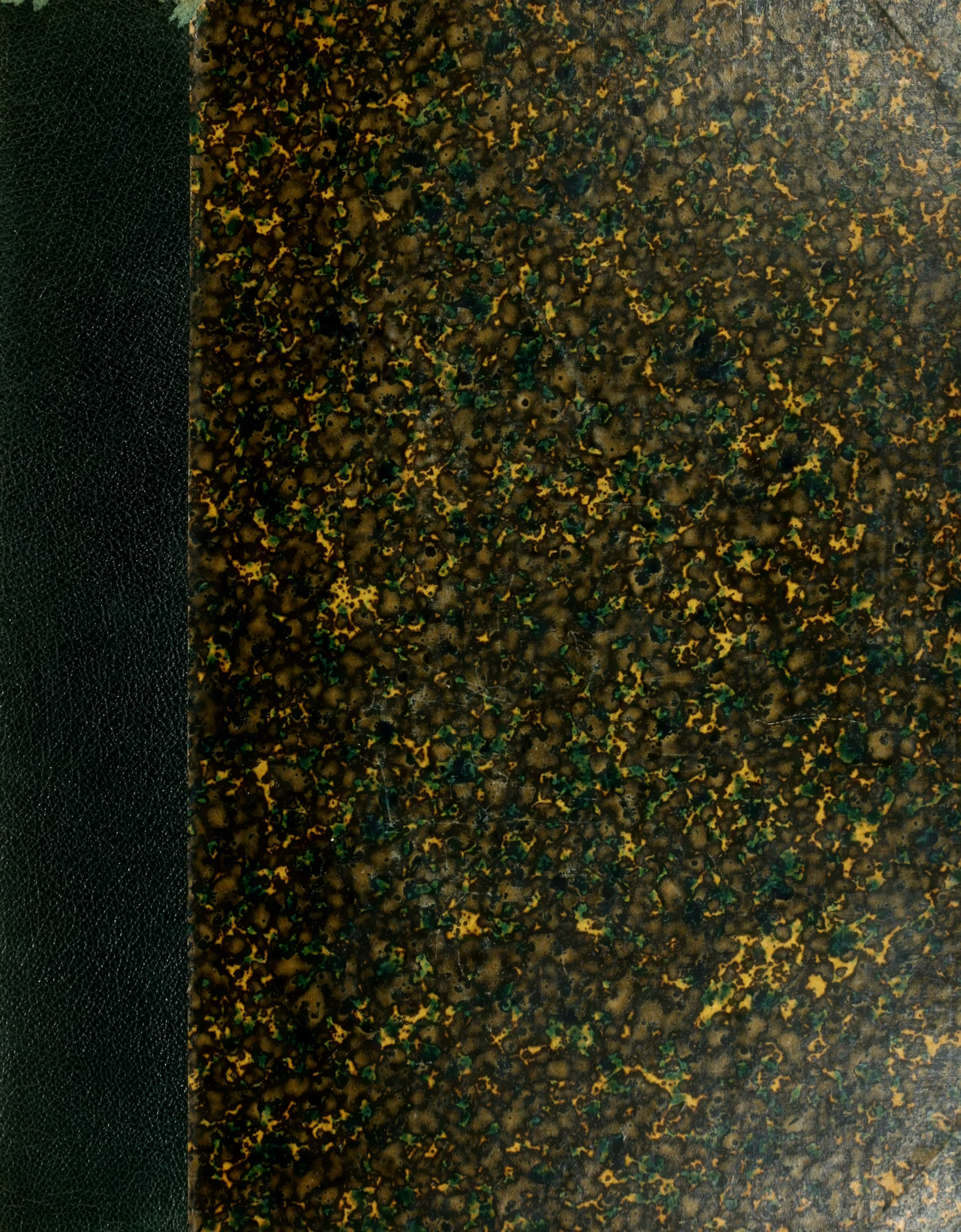






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. – TOME V. – ANNÉE 1860.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, nº 55.

1860

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME V.

Pages.

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Douzième article.). 1

Mémoire sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction quand on y permute ses variables de toutes les manières possibles; par M. *Émile Mathieu*. 9

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Suite.). 43

Mémoire sur le développement en séries des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice; par M. *Puiseux*. 65

Théorème concernant le double d'un nombre premier contenu dans l'une ou l'autre des deux formes linéaires $16k + 7$, $16k + 11$; par M. *J. Liouville*. . 103

Sur le développement en série de la fonction perturbatrice; par M. *Puiseux*. . . 105

Sur le double d'un nombre premier $4\mu + 1$; par M. *J. Liouville*. 119

Note sur un théorème de M. Sylvester relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre; par M. *J.-F. de Sperling*. 121

Note à l'occasion d'un théorème de M. Kronecker; par M. *J. Liouville*. 127

Surfaces de révolution du second degré; par M. *Housel*. 129

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24k + 11$; par M. *J. Liouville*. 139

Théorème concernant la fonction numérique relative au nombre des représentations d'un entier sous la forme d'une somme de trois carrés; par M. *J. Liouville*. 141

Nombre des représentations du double d'un entier impair sous la forme d'une somme de douze carrés; par M. *J. Liouville*. 143

Sur la forme $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 147

Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes; par M. *Ossian Bonnet*. 153

Addition à la Note au sujet d'un théorème de M. Kronecker insérée au cahier d'avril; par M. *J. Liouville*. 267

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 269

Pages

Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert; par M. *E. Barbier*. 273
Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique $E(x)$; par M. *J. Liouville*. 287
Sur le nombre des classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs; par M. *Kronecker*. (Traduction de M. *Hoüel*.). 289
Théorème concernant les nombres premiers de la forme $8\mu + 5$; par M. *J. Liouville*. 300
Sur les nombres premiers de la forme $16k + 7$; par M. *J. Liouville*. 301
Sur le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme $8k + 3$ et l'autre de la forme $8h + 5$; par M. *J. Liouville*. 303
Sur la forme $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 305
Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $24k + 11$; par M. *J. Liouville*. 309
Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24k + 19$; par M. *J. Liouville*. 311
Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres; par M. *E. Phillips*. 313
Somme d'une série; par M. *Besge*. 367
Sur les diviseurs de certaines formes de nombres qui résultent de la théorie de la division du cercle; par M. *E.-E. Kummer*. (Traduction de M. *Hoüel*.). . 369
Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 11$, $40\mu + 19$; par M. *J. Liouville*. 387
Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 7$; par M. *J. Liouville*. 389
Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 23$; par M. *J. Liouville*. 391
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Suite.). 393
Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales; par M. *Chasles*. 425
Addition à la Note sur certaines égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique $E(x)$, insérée dans le cahier d'août; par M. *J. Liouville*. 455
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Suite.). 457
Théorème concernant le triple d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$; par M. *J. Liouville*. 475

ERRATA.

Page 128, ligne 8, *au lieu de* i, *lisez* i^2.

139, ligne 23, *au lieu de* 114, *lisez* 144.

145, ligne 17, *au lieu de* 244, *lisez* 264.

147, ligne 7, *au lieu de* j'ai déjà, *lisez* j'ai eu dejà.

288, ligne 15, *au lieu de* $\sqrt{m - \theta^2}$, *lisez* $\sqrt{n - \theta^2}$.

303, ligne 3 (en remontant), *après* ne divise pas *ajoutez* y.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

DOUZIÈME ARTICLE.

Les formules que nous donnons dans ce douzième article sont très générales : elles contiennent une fonction arbitraire $F(x, y, z)$ de trois variables; et nous avertissons une fois pour toutes que cette fonction $F(x, y, z)$ est impaire, c'est-à-dire change de signe avec chaque variable, et de plus s'évanouit quand une des variables se trouve égale à zéro. En un mot, il faudra constamment se rappeler que l'on a

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z),$$

pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z employés dans le calcul. De plus, si une des variables prend une valeur nulle, la fonction devra alors s'annuler, en sorte que si l'on peut avoir, par exemple, $x = 0$, il faudra admettre que $F(0, y, z) = 0$.

I.

La première formule dont nous allons nous occuper, renferme comme cas particulier la formule (ε) de notre huitième article : elle se rapporte à un nombre m quelconque, pair ou impair, dont le mode de partition est défini par les deux équations

$$m = m'^2 + m'', \quad m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

ou, si l'on veut, par l'équation unique

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

d'' et δ'' étant impairs et positifs, tandis que l'entier m' peut être indifféremment positif ou négatif, ou même zéro : on a $\alpha'' = 0$ quand m'' est impair, ce qui arrive toutes les fois que m étant impair, m' est pair, ou que m étant pair, m' est impair. On forme la somme double

$$\sum\sum F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta''),$$

dans laquelle la première sommation s'applique aux valeurs de $2^{\alpha''} d''$ et δ'' pour chaque nombre déterminé m'', tandis que la deuxième sommation concerne les groupes successifs (m', m''). Notre théorème consiste en ce que la somme double indiquée est généralement égale à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors la somme double a pour valeur la somme simple que voici :

$$\sum F(\sqrt{m}, 2s - 1, 2s - 1),$$

s entier et variant de 1 à $\sqrt{m}$.

En d'autres termes, on a, suivant que m n'est pas ou est un carré,

$$(1) \begin{cases} \sum\sum F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta'') = 0, \\ \text{ou} \qquad = F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + F(\sqrt{m}, 5, 5) + \ldots \\ \qquad + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1, 2\sqrt{m} - 1). \end{cases}$$

Soit, par exemple, $m = 3$; les valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$, δ'' à employer seront

$$m' = 0,\quad 2^{\alpha''}d'' = 3,\quad \delta'' = 1;\quad m' = 0,\quad 2^{\alpha''}d'' = 1,\quad \delta'' = 3;$$

$$m' = 1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 2,\quad \delta'' = 1;\quad m' = -1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 2,\quad \delta'' = 1.$$

La somme double sera donc ici

$$F(3, 1, 5) + F(1, 3, -1) + F(3, -1, 5) + F(1, 3, 1),$$

et, comme on a, par la nature de la fonction F, qui est impaire,

$$F(1, 3, -1) = -F(1, 3, 1),\quad F(3, -1, 5) = -F(3, 1, 5),$$

on trouve zéro, comme il le faut.

Soit encore $m = 4$. On devra trouver, 4 étant un carré,

$$F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3).$$

Or les valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$ et δ'' à employer sont

$$m' = 0,\quad 2^{\alpha''}d'' = 4,\quad \delta'' = 1,$$

puis

$$m' = 1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 3,\quad \delta'' = 1;\quad m' = 1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 1,\quad \delta'' = 3;$$

$$m' = -1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 3,\quad \delta'' = 1;\quad m' = -1,\quad 2^{\alpha''}d'' = 1,\quad \delta'' = 3.$$

De là, pour la somme double,

$$F(4, 1, 7) + F(4, -1, 7) + F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3) + F(0, 5, -3),$$

ce qui se réduit bien aux deux termes écrits plus haut, parce que l'on a

$$F(4, -1, 7) = -F(4, 1, 7),\quad F(0, 5, -3) = 0.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail sur les applications de la formule (υ); mais nous devons montrer comment on en déduit la formule (ε) de notre huitième article. Il faut observer que les valeurs de y et de z étant essentiellement impaires, on remplira les conditions

imposées à la fonction $F(x, y, z)$ en la réduisant à la forme

$$(-1)^{\frac{1-z}{2}} F(x, y),$$

pourvu que l'on ait toujours

$$F(-x, y) = -F(x, y) = F(x, -y)$$

et

$$F(0, y) = 0.$$

Or cette valeur particulière de $F(x, y, z)$ conduit immédiatement à la formule (ε).

II.

Continuons à désigner par m un nombre entier positif donné, pair ou impair, et posons

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

m' étant un entier positif, nul ou négatif, tandis que d'' et δ'' sont des entiers essentiellement positifs, mais d'ailleurs pairs ou impairs. Puis considérons la somme double

$$S = \sum\sum F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta''),$$

où les sommations s'étendent à toutes les valeurs de m', d'', δ'' que comporte notre équation fondamentale

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

d'après ce qui vient d'être dit.

Le théorème que nous voulons donner au sujet de cette somme double S consiste en ce que l'on a généralement

$$S = 0.$$

Il n'y a exception que quand m est un carré, et alors S s'exprime par la différence des deux sommes simples que voici :

$$F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \ldots$$
$$+ F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1, 2\sqrt{m} - 1)$$

et

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \ldots + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2).$$

Comme on peut représenter la somme

$$F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}-1)$$

par

$$\sum F(\sqrt{m}, s, s),$$

où l'on prend successivement $s = 1, 2, 3, \ldots, 2\sqrt{m}-1$, et la somme

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \ldots + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2),$$

par

$$\sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t),$$

où l'on fera $t = 1, 2, 3, \ldots, \sqrt{m}-1$, notre théorème revient à dire que l'on a, suivant que m n'est pas ou est un carré,

$$(\varphi)\quad \left\{\begin{aligned} \sum\sum F(d''+m', \delta''-2m', 2d''+2m'-\delta'') &= 0, \\ \text{ou}\quad &= \sum F(\sqrt{m}, s, s) - \sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t), \end{aligned}\right.$$

la double sommation au premier membre se rapportant, je le répete, au mode de partition marqué par $m = m'^2 + d''\delta''$, avec $d'' > 0$, $\delta'' > 0$, les sommations simples aux entiers s et t variant, l'un de 1 à $2\sqrt{m}-1$, l'autre de 1 à $\sqrt{m}-1$, enfin la fonction $F(x, y, z)$ étant impaire, chose convenue pour toutes les formules du présent article.

La formule (υ), si générale qu'elle soit, pourrait être regardée comme contenue dans la formule (φ). Il n'y a qu'à regarder la fonction $F(x, y, z)$ comme nulle quand une des deux dernières variables y, z est un nombre pair. Mais je n'insisterai pas là-dessus pour le mo-

ment. Je me contenterai d'appliquer la formule (φ) à deux exemples, en prenant $m=3$, puis $m=4$.

Pour $m=3$, les couples de valeurs de m', d'', δ'' compatibles avec l'équation

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

sont

$$m'=0,\quad d''=1,\quad \delta''=3;\quad m'=1,\quad d''=1,\quad \delta''=2;$$
$$m'=-1,\quad d''=1,\quad \delta''=2;$$
$$m'=0,\quad d''=3,\quad \delta''=1;\quad m'=1,\quad d''=2,\quad \delta''=1;$$
$$m'=-1,\quad d''=2,\quad \delta''=1;$$

et, puisque m n'est pas un carré, il s'ensuit que la somme

$$\begin{gathered}F(1,3,-1)+F(2,0,2)+F(0,4,-2)\\+F(3,1,5)+F(3,-1,5)+F(1,3,1)\end{gathered}$$

doit être égale à zéro; or cela a lieu effectivement puisque, d'après la nature de la fonction F, on a

$$F(2,0,2)=0,\quad F(0,4,-2)=0,$$

et de plus

$$F(1,3,-1)=-F(1,3,1),\quad F(3,-1,5)=-F(3,1,5).$$

Pour $m=4$, les couples de valeurs de m', d'', δ'' sont, d'une part,

$$m'=0,\quad d''=1,\quad \delta''=4;$$
$$m'=0,\quad d''=2,\quad \delta''=2;$$
$$m'=0,\quad d''=4,\quad \delta''=1;$$

et, d'autre part,

$$m'=1,\quad d''=1,\quad \delta''=3;\qquad m'=-1,\quad d''=1,\quad \delta''=3;$$
$$m'=1,\quad d''=3,\quad \delta''=1;\qquad m'=-1,\quad d''=3,\quad \delta''=1;$$

ce qui, réduction faite d'après la nature de la fonction $F(x, y, z)$,

donne, pour premier membre de l'équation (φ), l'expression suivante

$$F(2,1,1) + F(2,2,2) + F(2,3,3) - F(1,4,2).$$

Or c'est bien là ce que donne aussi le second membre, m étant ici un carré, et les valeurs à employer étant

$$\sqrt{m} = 2, \quad s = 1, \quad s = 2, \quad s = 3, \quad t = 1.$$

Maintenant, sans sortir, au fond, de la même analyse et des mêmes procédés *élémentaires* de démonstration dont il ne sera question que plus tard, passons à une autre formule.

III.

Nous supposerons désormais que l'entier donné m, auquel nos calculs se rapportent, est un entier impair, du reste quelconque, et nous l'assujettirons au mode de partition marqué par l'équation

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

où d'' et δ'' seront des entiers impairs et positifs, tandis que m' sera indifféremment un nombre entier positif ou négatif, ou zéro. C'est à tous les groupes (m', d'', δ'') ainsi définis que s'appliquera la somme double

$$\sum\sum F(d'' + 2m', \ \delta'' - 2m', \ 2m' + d'' - \delta'').$$

Le théorème que nous avons à donner à ce sujet est on ne peut plus simple; car il consiste en ce que la somme double indiquée est égale à zéro, sans qu'il y ait aucune exception.

Ainsi, pour tout nombre entier impair m, et pour toute fonction algébrique ou numérique $F(x, y, z)$ remplissant les conditions exigées au début de cet article, on a toujours, sous le mode de partition indiqué,

$$(\chi) \qquad \sum\sum F(d'' + 2m', \ \delta'' - 2m', \ 2m' + d'' - \delta'') = 0.$$

Soit, par exemple, $m = 1$, ce qui donne uniquement

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

il viendra

$$F(1, 1, 0) = 0;$$

ce qui a lieu effectivement d'après la nature de la fonction $F(x, y, z)$.

Soit ensuite $m = 3$. On pourra faire

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \qquad m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1;$$

et de plus

$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1; \qquad m' = -1, \quad d' = 1, \quad \delta'' = 1.$$

De là l'équation

$$F(1, 3, -2) + F(3, 1, 2) + F(3, -1, 2) + F(-1, 3, -2) = 0,$$

qui est exacte, puisque le premier et le quatrième terme du premier membre sont égaux au signe près, de même que le second et le troisième terme.

Je m'arrête ici : le lecteur voit assez que la formule (χ) est susceptible d'applications intéressantes.

MÉMOIRE

SUR

LE NOMBRE DE VALEURS QUE PEUT ACQUÉRIR UNE FONCTION QUAND ON Y PERMUTE SES VARIABLES DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES;

PAR M. ÉMILE **MATHIEU** [*].

Des substitutions.

Soient $abcd\ldots l$ et $efgh\ldots k$ deux permutations des mêmes lettres : on représente par la notation

$$\begin{pmatrix} abcd\ldots l \\ efgh\ldots k \end{pmatrix}$$

l'opération qui consiste à remplacer les lettres de la permutation supérieure par celles qui occupent le même rang dans la permutation inférieure; cette opération porte le nom de *substitution*.

Rangeons les lettres a, b, c, d,..., l sur un cercle, puis mettons chacune d'elles à la place de celle qui la précède : nous aurons ainsi fait sur ces lettres une substitution qui est dite *circulaire;* ainsi la substitution

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\ldots\ l \\ b\,c\,d\ldots l\,a \end{pmatrix}$$

est circulaire; on l'écrit plus simplement

$$(abcd\ldots l).$$

[*] Ce Mémoire est un extrait de plusieurs Mémoires présentés à l'Académie des Sciences. (*Voyez* les *Comptes rendus* des 31 mai, 21 juin et 2 novembre 1858, et du 25 avril 1859.)

Toute substitution, si elle n'est pas circulaire, équivaut à plusieurs substitutions circulaires effectuées simultanément sur des lettres différentes. Ainsi la substitution

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,k\,l\,m\,n\,o\,p \\ m\,g\,a\,l\,b\,n\,d\,c\,k\,f\,e\,o\,i\,p\,h \end{pmatrix}$$

peut s'écrire

$$(amophc)\,(bgdle)\,(ikfn).$$

Les substitutions circulaires en lesquelles se décompose une substitution quelconque sont appelées les *cycles* de la substitution. Si le nombre des lettres de chacun des cycles d'une substitution est le même, la substitution est dite *régulière*.

Une substitution S que l'on obtient en faisant une autre substitution S_1 k fois de suite, se nomme la $k^{\text{ième}}$ puissance de S_1.

Soient

$$A, B, C, \ldots, G,$$

différentes substitutions effectuées sur les n lettres d'une fonction

$$F(a, b, c, \ldots, l),$$

et qui laissent cette fonction invariable; si nous faisons successivement dans un ordre quelconque quelques-unes de ces substitutions, nous obtiendrons en général d'autres substitutions, qui laisseront évidemment la fonction F invariable; les substitutions ainsi formées sont appelées les *dérivées* des substitutions A, B, ..., G. On considère

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c \ldots l \\ a\,b\,c \ldots l \end{pmatrix}$$

comme faisant partie de ces substitutions dérivées.

Si sur la fonction

$$F(a, b, c, \ldots, l)$$

on fait les M substitutions qui la laissent invariable, on obtient M valeurs égales de cette fonction $F, F_1, F_2, \ldots, F_{M-1}$.

Faisons ensuite sur cette fonction la substitution

$$\begin{pmatrix} a\ b\ c \ldots l \\ a'\ b'\ c' \ldots l' \end{pmatrix}$$

qui change cette fonction ; $a', b', c', .., l'$ étant par conséquent les lettres $a, b, c, \ldots, l$ prises dans un autre ordre ; nous aurons la fonction

$$(2) \qquad F(a', b', c', \ldots, l');$$

changeons dans les M substitutions qui laissent la fonction (1) invariable les lettres $a, b, c, \ldots, l$, respectivement en $a', b', \ldots, l'$, et nous aurons M substitutions qui laissent la fonction (2) invariable, et si on les effectue sur la fonction (2), on obtient M autres valeurs égales $F', F'_1, F'_2, \ldots, F'_{M-1}$. On voit d'après cela que les $1.2.3\ldots n$ valeurs que l'on obtient en permutant les n lettres $a, b, c, \ldots, l$ dans la fonction (1) de toutes les manières possibles sont égales M à M, et que le nombre des valeurs distinctes de la fonction (1) est égal à $\frac{1.2.3\ldots n}{M}$, et, par conséquent, à un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$.

Des fonctions transitives.

Nous appellerons fonction *transitive* une fonction dans laquelle on peut faire occuper à une lettre quelconque telle place que l'on veut, sans que la fonction change de valeur, pourvu que l'on fasse occuper à toutes les autres des positions convenablement choisies.

Une fonction qui n'est pas transitive, sera dite *intransitive*.

C'est à M. Cauchy que nous empruntons l'idée de distinguer les fonctions en fonctions transitives et en fonctions intransitives.

Puisque dans une fonction symétrique on peut déplacer les lettres d'une manière quelconque, sans qu'elle change de valeur, il est clair qu'une fonction symétrique est transitive. Mais il existe bien d'autres fonctions transitives ; car une fonction est transitive toutes les fois qu'elle n'est pas changée par une substitution circulaire effectuée sur toutes ses lettres.

Supposons en effet une fonction de n lettres qui ne soit pas changée

par la substitution circulaire suivante, effectuée sur ses n lettres,

$$(abcd\ldots g\ldots kl).$$

Il sera toujours possible d'amener une lettre quelconque à telle place que l'on voudra dans la fonction, sans que la valeur de cette fonction soit changée. Car si l'on veut, par exemple, amener dans la fonction la lettre g, qui occupe la $\beta^{ième}$ place dans la substitution à la place de la lettre a, il est clair qu'il suffira de faire cette substitution $\beta - 1$ fois.

Ainsi, par exemple, la fonction de trois lettres

$$ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3.$$

qui n'est pas changée par la substitution circulaire (abc), est une fonction transitive.

Une fonction peut d'ailleurs être transitive sans jouir de la propriété d'être invariable par une substitution circulaire effectuée sur toutes ses lettres. Par exemple, la fonction

$$(a-b)(c-d)$$

est transitive, et il est aisé de voir qu'elle est changée par toute substitution circulaire effectuée sur les quatre lettres a, b, c, d.

Il est facile de reconnaître que le nombre des valeurs distinctes d'une fonction transitive de n lettres est le même que si cette fonction était considérée comme fonction de $n-1$ lettres, et que, par conséquent, on supposât une lettre immobile.

Considérons, en effet, une fonction transitive de n lettres

$$F(a, b, c, d, \ldots, k, l),$$

et supposons que l'on ait fait sur ses lettres toutes les substitutions possibles. Nous pourrons ensuite, dans toutes les fonctions ainsi obtenues, et dans lesquelles la lettre a ne sera pas à la première place, l'amener à cette place, pourvu que nous déplacions convenablement les autres. Toutes les valeurs se réduisant à des fonctions dans lesquelles a occupe la première place, il est clair que la fonction F acquiert toutes ses valeurs, considérée comme fonction des $n-1$ lettres b, c, d, $\ldots$, l.

Réciproquement, si la fonction F acquiert toutes ses valeurs, considérée comme fonction des $n-1$ lettres $b, c, \ldots, l$, cette fonction est transitive par rapport à ses n lettres.

En effet, imaginons que l'on fasse sur les n lettres $a, b, \ldots, l$ les $1.2.3\ldots n$ permutations possibles, on obtiendra des valeurs dans lesquelles a occupera la première place, d'autres dans lesquelles a occupera la deuxième place, etc., d'autres enfin dans lesquelles a occupera la $n^{ième}$ place, et les valeurs distinctes se réduiront à celles dans lesquelles a occupera la première place. Il suit de là qu'on peut amener une lettre quelconque à la première place sans que la fonction change de valeur, pourvu que l'on permute convenablement toutes les lettres, et réciproquement on peut amener une lettre qui se trouve à la première place à une place quelconque. D'après cela, on pourra amener une lettre quelconque d à la place d'une lettre quelconque f, sans que la fonction change de valeur; car on pourra d'abord amener d à la place de a en permutant convenablement les lettres, puis on pourra amener d qui occupe la première place à la place de la lettre f. Donc la fonction est transitive.

On peut remarquer que si r est le nombre des substitutions qui s'effectuent sur les $n-1$ lettres $b, c, \ldots, l$, sans changer la valeur de la fonction F, le nombre des valeurs de cette fonction est $\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{r}$, et, par conséquent, le nombre total des substitutions qui la laissent invariable est rn.

Des fonctions plusieurs fois transitives.

Imaginons une fonction transitive de n lettres; cette fonction, considérée comme fonction de $n-1$ lettres, pourra encore être transitive. S'il en est ainsi, nous dirons que la fonction est deux fois transitive.

Si cette fonction est encore transitive, considérée comme fonction de $n-2$ lettres prises parmi les $n-1$ précédentes, nous dirons qu'elle est trois fois transitive, et ainsi de suite.

Il suit de là qu'une fonction μ fois transitive acquiert toutes ses valeurs, considérée comme fonction de $n-\mu$ lettres. On voit encore qu'une fonction symétrique est une fonction $n-1$ fois transitive.

Une fonction de n lettres qui est invariable par une substitution

circulaire de ses n lettres, par une substitution circulaire de $n-1$ lettres, par une troisième substitution circulaire faite sur $n-2$ d'entre ces dernières, etc.; enfin, par une $\mu^{ième}$ substitution circulaire effectuée sur $n-\mu+1$ lettres obtenues en agissant comme précédemment, est μ fois transitive.

Théorème. — *Si une fonction de n lettres est μ fois transitive, elle est transitive par rapport à $n-1$ lettres quelconques, elle est transitive par rapport à $n-2$ lettres quelconques, etc.; enfin, elle est transitive par rapport à $n-\mu+1$ lettres quelconques.*

En effet, supposons une fonction transitive par rapport à ses n lettres

$$a, b, c, d, \ldots, k, l,$$

puis par rapport aux lettres

$$b, c, d, \ldots, k, l,$$

puis par rapport aux lettres

$$c, d, \ldots, k, l,$$

et ainsi de suite. Je dis que cette fonction est transitive par rapport à $n-\mu+1$ lettres quelconques $e_1, f_1, \ldots, k_1, l_1$.

En effet, désignons par a', b'', c''', ... les $\mu-1$ lettres de la fonction qui ne font pas partie de celles-ci. La fonction étant transitive par rapport aux lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, nous pouvons amener la lettre a' à la place de la lettre a, et les $n-1$ autres $b', c', \ldots, k', l'$ remplaceront respectivement $b, c, \ldots k, l$. Or ces $n-1$ lettres $b', c', \ldots, k', l'$ remplaçant respectivement $b, c, \ldots, k, l$, la fonction sera transitive par rapport aux lettres

$$b', c', d', \ldots, k', l',$$

puis par rapport aux lettres

$$c', d' \ldots, k', l',$$

et ainsi de suite. Parmi les $n-1$ lettres $b', c', \ldots, k', l'$, nous pouvons prendre b'' et l'amener à la place de b', pourvu que nous déplacions

convenablement les autres, et les lettres $c', d', \ldots, k', l'$ seront remplacées respectivement par $c'', d'', \ldots, k'', l''$. Les lettres $c'', d'', \ldots, k'', l''$ se trouvent dans les mêmes conditions que les lettres $c', d', \ldots, k', l'$, et par suite que les lettres $c, d, \ldots, k, l$. Et si l'on imagine que l'on continue ce raisonnement, la proposition devient évidente.

Corollaire I. — *Dans une fonction μ fois transitive, on peut amener μ lettres quelconques à telles places que l'on veut.*

Corollaire II. — *Réciproquement, si dans une fonction on peut amener μ lettres quelconques à telles places que l'on veut sans que la fonction change de valeur, la fonction est μ fois transitive.*

Supposons, en effet, que dans une fonction on puisse amener μ lettres quelconques à la place de μ autres lettres quelconques. Puisqu'on peut amener une lettre quelconque a' à la place d'une autre quelconque a sans que la fonction change de valeur, cette fonction est une fois transitive. Puisque, sans déranger a', on peut amener une lettre quelconque b' à la place de b, la fonction est deux fois transitive, et ainsi de suite.

Théorème. — *Si une fonction de n lettres acquiert toutes ses valeurs, considérée comme fonction de $n-\mu$ lettres, elle est μ fois transitive.*

Nous avons vu que, si une fonction de n lettres $a, b, c, \ldots, l$ acquiert toutes ses valeurs considérée comme fonction de $n-1$ lettres $b, c, \ldots, l$, elle est transitive par rapport à ses n lettres. D'après cela, supposons une fonction de n lettres $a, b, \ldots, f, g, \ldots, k, l$, qui acquière toutes ses valeurs considérée comme fonction des $n-\mu$ lettres $g, \ldots, k, l$; elle acquerra évidemment toutes ses valeurs considérée comme fonction des $n-1$ lettres

$$b, c, \ldots, f, g, \ldots, k, l,$$

puis elle acquerra toutes ses valeurs, considérée comme fonction des $n-2$ lettres

$$c, \ldots, f, g, \ldots, k, l,$$

et ainsi de suite; enfin elle acquerra toutes ses valeurs considérée comme fonction des $n-\mu$ lettres

$$g, \ldots, k, l$$

et, par conséquent, la fonction sera transitive par rapport à n lettres, puis par rapport à $n-1$ de ces dernières, puis par rapport à $n-2$ lettres prises parmi les $n-1$ précédentes, et ainsi de suite. Donc enfin la fonction est μ fois transitive.

THÉORÈME. — *Si une fonction de n lettres est transitive par rapport à ses n lettres*

$$a, b, \ldots, f, g, h,$$

puis transitive par rapport à $n-1$ lettres

$$a', b', \ldots, f', g',$$

puis transitive par rapport à $n-2$ lettres

$$a'', b'', \ldots, f'',$$

et ainsi de suite, enfin transitive par rapport à $n-\mu+1$ lettres, elle est μ fois transitive.

La fonction est transitive par rapport aux lettres $a, b, \ldots, f, g, h$, et elle est aussi transitive par rapport à $n-1$ de ces lettres $a', b', \ldots, f', g'$; elle est donc deux fois transitive, et par suite elle est transitive par rapport à $n-1$ lettres quelconques; ainsi la fonction est transitive par rapport aux $n-1$ lettres

$$a'', b'', \ldots, f'', g_1;$$

on voit donc que la fonction est transitive par rapport aux n lettres

$$a'', b'', \ldots, f'', g_1, h_1,$$

puis par rapport aux $n-1$ lettres

$$a'', b'', \ldots, f'', g_1,$$

puis par rapport aux $n-2$ lettres

$$a'', b'', \ldots, f'';$$

la fonction est donc trois fois transitive, et si l'on imagine que l'on

continue ce raisonnement, il devient clair que la fonction considérée est μ fois transitive.

Théorème. — *Une fonction μ fois transitive, qui n'est pas changée par une certaine substitution qui ne comprend pas plus de μ lettres, est invariable par une substitution circulaire de trois lettres quelconques, et, par suite, elle n'a au plus que deux valeurs.*

Supposons, en effet, une fonction qui soit μ fois transitive et qui ne soit pas changée par la substitution

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a\,b\,c\,\ldots f \ldots p \\ k\,l\,m \ldots b \ldots q \end{pmatrix}$$

qui ne renferme pas plus de μ lettres. La fonction étant μ fois transitive, à la place des lettres $a, b, c, \ldots, p$, on peut amener d'autres lettres quelconques, sans que cette fonction change de valeur; donc aux places de $a, b, c, \ldots, p$, on peut mettre respectivement les lettres $a, \alpha, c, \ldots, p$, la lettre α n'appartenant pas à la substitution (1), et, par conséquent, la fonction n'étant pas changée par la substitution (1) n'est pas changée non plus par la substitution

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a\,\alpha\,c\,\ldots f \ldots p \\ k\,l\,m \ldots \alpha \ldots q \end{pmatrix}.$$

Faisons la substitution (1), puis l'inverse de la substitution (2), et nous aurons fait en définitive la substitution circulaire de trois lettres $(b\alpha f)$, sans que la fonction ait changé de valeur. Si donc la fonction est au moins trois fois transitive, à la place des lettres b, α, f, on pourra mettre dans la fonction trois lettres quelconques; la fonction ne sera donc changée par aucune substitution circulaire de trois lettres, et je dis que, par suite, elle aura au plus deux valeurs.

En effet, faire une substitution circulaire $(ab\alpha)$ revient à faire la transposition (ab), puis la transposition $(a\alpha)$. La transposition (ab) changera la valeur F_1 de la fonction considérée en F_2, et la transposition $(a\alpha)$ changera la valeur F_2 en la valeur primitive F_1. Faisons ensuite la substitution circulaire (abc) sur F_1, et pour cela faisons la transposition (ab), puis la transposition (ac). La transposition (ab)

change F_1 en F_2, et la transposition (ac) faite sur F_2 doit rendre la fonction F_1. Ainsi les deux transpositions $(a\alpha)$ et (ac) qui ont une lettre commune, produisent le même changement sur la fonction; de même (ac) produira le même changement que (cd). Par conséquent, $(a\alpha)$ et (cd) produisent le même changement sur la fonction. Or toute substitution peut s'effectuer par une série de transpositions successives. Si l'on fait une première transposition sur F_1, F_1 deviendra F_2; en faisant une deuxième transposition sur F_2, on changera F_2 en F_1; une troisième transposition changera F_1 en F_2, et ainsi de suite. La fonction a donc évidemment au plus deux valeurs, car on peut avoir $F_2 = F_1$.

Ainsi le théorème est démontré toutes les fois que la fonction est au moins trois fois transitive.

Il reste à démontrer qu'une fonction deux fois transitive qui est invariable par la transposition (ab) n'a pas plus de deux valeurs. Or, comme dans une telle fonction on peut amener à la place de a et b deux lettres quelconques, on voit que cette fonction est invariable par une transposition quelconque, ou qu'elle est symétrique par rapport à toutes ses lettres.

Corollaire. — *Une fonction de n lettres ne peut être plus de $\frac{n}{2}$ fois transitive, lorsqu'elle a plus de deux valeurs.*

En effet, considérons une fonction de n lettres μ fois transitive; cette fonction est changée par toute substitution qui s'effectue sur μ lettres; elle a donc au moins $1.2.3\ldots\mu$ valeurs. D'ailleurs le nombre des valeurs de la fonction est un diviseur du produit $1.2.3\ldots(n-\mu)$; on a donc

$$1.2.3\ldots(n-\mu) \geq 1.2.3\ldots\mu,$$

et, par suite, μ est au plus égal à $\frac{n}{2}$.

On peut citer un cas où μ est précisément égal à $\frac{n}{2}$. Soit la fonction

$$(ad+bc+ef)(ab+ce+df)(ae+bd+cf)(ac+de+bf)(af+cd+be);$$

cette fonction est invariable par chacune des trois substitutions circu-

laires

$$(acbfed),\quad (abcde),\quad (abdc),$$

comme il est aisé de le vérifier.

Cette fonction est donc trois fois transitive; par suite elle a au moins $1.2.3 = 6$ valeurs; car il est aisé de voir qu'elle a plus de deux valeurs; elle n'a pas d'ailleurs plus de six valeurs, puisqu'elle doit acquérir toutes ses valeurs, considérée comme fonction de trois lettres; elle a donc six valeurs.

Fonctions de n lettres qui ont deux valeurs.

Quel que soit n, on peut former des fonctions de n lettres qui n'aient que deux valeurs

Prenons en effet les n lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, et faisons le produit v de toutes les différences de ces n lettres, nous aurons

$$v = (a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l)(b-c)\ldots(k-l);$$

v^2 est évidemment une fonction symétrique des n lettres, et v a deux valeurs égales et de signe contraire; car v change de signe si l'on transpose a avec b.

Soit F une fonction des n lettres $a, b, c, \ldots, l$, qui a deux valeurs; on démontre facilement que cette fonction est changée par la transposition de deux lettres quelconques. (*Voir* 19e leçon de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.) D'après cela, désignons par $\mathrm{F}(a, b)$ l'une de ces deux valeurs, l'autre valeur sera $\mathrm{F}(b, a)$. Posons

$$\mathrm{F}(a,b) + \mathrm{F}(b,a) = \varphi,\quad \mathrm{F}(a,b)v - \mathrm{F}(b,a)v = \psi,$$

φ et ψ ne sont pas changées par la transposition (ab), et comme a et b sont deux quelconques des lettres $a, b, \ldots, l$, les fonctions φ et ψ sont symétriques. De ces équations on déduit

$$\mathrm{F}(a,b) = \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2v^2}v,\quad \text{ou}\quad \mathrm{F} = \Phi + \Psi v,$$

Φ et Ψ étant deux fonctions symétriques des lettres $a, b, \ldots, l$.

Théorème. — *La fonction de n lettres qui a deux valeurs, est changée*

par toute substitution circulaire effectuée sur un nombre pair de lettres, et elle n'est changée par aucune substitution circulaire faite sur un nombre impair de lettres.

Faisons en effet sur cette fonction la substitution circulaire de α lettres $(abcd\ldots g)$. Pour faire cette substitution, nous pourrons transposer a avec b, puis a avec c, puis a avec d, et ainsi de suite ; et nous ferons ainsi $\alpha - 1$ transpositions. Or à chaque transposition la fonction change de valeur; donc puisque la fonction n'a que deux valeurs, si α est pair, la fonction change de valeur, et si α est impair, la fonction ne change pas. Ce qu'il fallait démontrer.

Scolie. — D'après cela, pour reconnaître si une substitution ne change pas la fonction qui a deux valeurs, on décomposera cette substitution en ses cycles. Si le nombre des cycles qui renferment un nombre pair de lettres est pair, la fonction qui a deux valeurs n'est pas changée par cette substitution; si le nombre de ces cycles est impair, la fonction est changée par cette substitution.

Corollaire. — *Soit une fonction φ invariable par une substitution* A *qui renferme un nombre impair de cycles ayant un nombre pair de lettres; si l'on multiplie cette fonction φ par la fonction des mêmes lettres qui a deux valeurs, on obtient une fonction* F *qui a un nombre de valeurs double du nombre des valeurs de φ.*

En effet, soient

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\mu-1}$$

les μ valeurs distinctes de la fonction φ que l'on obtient en faisant sur la première les substitutions

$$(a) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_{\mu-1};$$

soit ν la fonction des mêmes lettres qui a deux valeurs; faisons sur $\varphi\nu$ les mêmes substitutions, nous aurons les fonctions

$$(b) \qquad \varphi\nu, \varphi_1\nu_1, \varphi_2\nu_2, \ldots, \varphi_{\mu-1}\nu_{\mu-1},$$

$\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ se réduisant à deux valeurs ν et ν'. Sur les lettres de la substitution A, faisons successivement les substitutions (a), nous

aurons les substitutions semblables

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1};$$

faisons chacune de ces substitutions respectivement sur les fonctions (b) de même rang, les premiers facteurs ne seront pas changés, et, d'après le scolie ci-dessus, les seconds facteurs le seront : on aura donc μ autres valeurs de $\varphi\nu$. Comme la fonction $\varphi\nu$ n'a évidemment pas plus de 2μ valeurs, elle en a effectivement 2μ.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$(ad+bc+ef)(ab+ce+df)(ae+bd+cf)(ac+de+bf)(af+be+cd)$$

est une fonction trois fois transitive qui a six valeurs, et qui n'est pas changée par les substitutions

$$(acbfed), \quad (abcde), \quad (abdc).$$

Si nous multiplions cette fonction par la fonction des mêmes lettres qui a deux valeurs, nous aurons une fonction qui aura douze valeurs, et qui sera invariable par les substitutions

$$(abe)(cfd), \quad (abcde), \quad (ad)(bc);$$

on voit donc aussi que cette fonction est deux fois transitive.

Fonctions transitives d'un nombre premier p de lettres. — Fonction trois fois transitive de $p+1$ lettres qui a $1.2\ldots(p-2)$ valeurs, et fonction deux fois transitive de $p+1$ lettres qui a $1.2\ldots(p-2)\times 2$ valeurs.

Pour étudier les fonctions transitives d'un nombre premier de variables, nous désignerons ces p variables par $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, en convenant que l'on aura $x_a = x_e$, si l'on a

$$a \equiv e \ (\text{mod. } p).$$

Nous désignerons aussi par $(x_z\, x_{\theta z})$ la substitution qui changera en général x_z en $x_{\theta z}$.

Il est facile de former une fonction

$$(a) \qquad \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$$

qui soit invariable par la substitution circulaire

$$(b) \qquad (x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{p-1});$$

pour cela, il suffira de prendre une fonction $\lambda(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ qui soit changée par toutes les substitutions, et de faire sur cette fonction $p-1$ fois de suite la substitution (b); on aura ainsi les p fonctions

$$\begin{array}{l} \lambda(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), \\ \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_0), \\ \lambda(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et, en prenant une fonction symétrique de ces p fonctions, on aura la fonction (a). Cette fonction transitive, qui est invariable par les p substitutions $(x_z\, x_{z+m})$, a évidemment $1.2\ldots(p-1)$ valeurs.

Soient ω une racine primitive de p, et u un diviseur de $p-1$; faisons sur la fonction (a) la substitution régulière $(x_z\, x_{\omega^u z})$ et ses puissances $(x_z\, x_{a^u z})$, nous aurons les fonctions

$$(c) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), \\ \psi(x_0, x_{\omega^u}, x_{2\omega^u}, \ldots, x_{(p-1)\omega^u}), \\ \psi(x_0, x_{\omega^{2u}}, x_{2\omega^{2u}}, \ldots, x_{(p-1)\omega^{2u}}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

formons une fonction symétrique de ces $\frac{p-1}{u}$ fonctions, et nous aurons une fonction Ψ invariable par toutes les substitutions

$$(d) \qquad (x_z\, x_{a^u z+b}).$$

On voit d'abord immédiatement que si l'on fait sur les fonctions (c) la substitution $(x_z\, x_{\omega^u z})$, on passe d'une de ces fonctions à la suivante; par conséquent, Ψ est invariable par $(x_z\, x_{\omega^u z})$ et par ses puis-

sances $(x_z x_{a^u z})$. Ensuite la première des fonctions (c) étant invariable par les substitutions $(x_z x_{z+m})$, la fonction

$$\psi(x_0, x_{\omega^{su}}, x_{2\omega^{su}}, x_{3\omega^{su}}, \ldots)$$

est invariable par les substitutions

$$(x_{\omega^{su} z}, x_{\omega^{su}(z+m)}),$$

ou $(x_z x_{z+m})$. Donc chacune des fonctions (c) est invariable par les substitutions $(x_z x_{z+m})$; donc Ψ est invariable par les substitutions $(x_z x_{a^u z})$ et $(x_z x_{z+m})$, et par conséquent aussi, par les substitutions (d); Ψ est donc une fonction transitive qui a $1.2\ldots(p-2)\times u$ valeurs.

Ainsi, *soient p un nombre premier, et u un diviseur de $p-1$, il y a toujours une fonction transitive de p variables qui a $1.2\ldots(p-2)\times u$ valeurs.*

On doit remarquer, en particulier, le cas où u est égal à 1: dans ce cas la fonction Ψ est une fonction deux fois transitive qui a $1.2\ldots(p-2)$ valeurs et qui est invariable par toutes les substitutions $(x_z x_{az+b})$; cette fonction coïncide avec la fonction résolvante de Lagrange, si l'on prend pour la fonction (a) la fonction

$$(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{p-1} x_{p-1}),$$

α étant une racine $p^{ième}$ imaginaire de l'unité.

Nous allons donner une autre méthode pour former les fonctions invariables par les substitutions (d).

Il est aisé de former une fonction

$$(e) \qquad \varphi\left[(x_0), x_1, x_\omega, x_{\omega^2}, \ldots, x_{\omega^{p-2}}\right]$$

qui soit invariable par la substitution régulière $(x_z x_{\omega^u z})$; il suffira, pour cela, de faire cette substitution et ses puissances sur une fonction quelconque μ, et de prendre une fonction symétrique des fonctions $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ ainsi obtenues.

Faisons sur la fonction (e) les p substitutions comprises dans l'expression $(x_z x_{z+k})$, nous aurons p fonctions renfermées dans la

formule

$$(f) \qquad \varphi\left[(x_k), x_{1+k}, x_{\omega+k}, x_{\omega^2+k}, \ldots, x_{\omega^{p-2}+k}\right] = \varphi_k,$$

k étant susceptible des valeurs o, 1, 2,..., $p-1$. Formons une fonction symétrique Φ des fonctions (f), et nous aurons une fonction invariable par les substitutions (d).

Il est d'abord évident que la fonction Φ est invariable par les substitutions $(x_z\, x_{z+m})$; je dis ensuite que cette fonction est invariable par la substitution $(x_z\, x_{\omega^u z})$. Or, par cette substitution φ_k deviendra

$$(g) \qquad \varphi\left[(x_{k\omega^u}), x_{\omega^u+k\omega^u}, x_{\omega^{u+1}+k\omega^u}, x_{\omega^{u+2}+k\omega^u}, \ldots\right],$$

et de même que la fonction (e) est invariable par $(x_z\, x_{\omega^u z})$, la fonction (f) n'est pas changée par $(x_{z+k}\, x_{\omega^u z+k})$ et (g) n'est pas changée par

$$(x_{\omega^u z+k\omega^u}, x_{\omega^{2u} z+k\omega^u});$$

si l'on fait sur (g) l'inverse de cette dernière substitution, cette fonction devient

$$\varphi\left[(x_{k\omega^u}), x_{1+k\omega^u}, x_{\omega+k\omega^u}, x_{\omega^2+k\omega^u}, \ldots\right],$$

ou $\varphi_{k\omega^u}$; ainsi la substitution $(x_z\, x_{\omega^u z})$ change φ_k en $\varphi_{k\omega^u}$; en faisant sur les variables la substitution $(x_z\, x_{\omega^u z})$, on fait sur les fonctions φ la substitution $(\varphi_k\, \varphi_{\omega^u k})$; la fonction Φ est donc invariable par $(x_z\, x_{\omega^u z})$, et, par suite, par les substitutions (d).

Il est naturel de se demander ici s'il n'existe pas une fonction trois fois transitive de $p+1$ variables, qui ait 1.2... $(p-2)$ valeurs, et qui, considérée comme fonction de p lettres, soit la fonction deux fois transitive qui est invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{az+b})$; or nous allons démontrer que cette fonction existe effectivement, en sorte que l'on a ce théorème :

Si p est un nombre premier, il y a une fonction trois fois transitive de $p+1$ variables, qui a 1.2... $(p-2)$ valeurs.

Nous allons donner la forme générale de cette fonction.

Soit $\varphi\left[(x_0, x_1, x_\omega, x_{\omega^2}, x_{\omega^3}, \ldots, x_{\omega^{p-2}}\right]$ une fonction qui est inva-

riable par la substitution circulaire $(x_z\, x_{\omega z})$; d'après ce que nous venons de voir, nous aurons une fonction deux fois transitive invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{az+b})$, en formant une fonction symétrique des fonctions suivantes :

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{array}{l}
\varphi\left[(x_0), \quad x_1, \quad x_\omega, \quad x_{\omega^2}, \quad x_{\omega^3}, \ldots, \quad x_{\omega^{p-2}}\right],\\
\varphi\left[(x_1), \quad x_2, \quad x_{1+\omega}, \quad x_{1+\omega^2}, \quad x_{1+\omega^3}, \ldots, \quad x_{1+\omega^{p-2}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[(x_r), \quad x_{r+1}, \quad x_{r+\omega}, \quad x_{r+\omega^2}, \quad x_{r+\omega^3}, \ldots, \quad x_{r+\omega^{p-2}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[(x_{p-1}), \quad x_0, \quad x_{p-1+\omega}, \quad x_{p-1+\omega^2}, \quad x_{p-1+\omega^3}, \ldots, \quad x_{p-1+\omega^{p-2}}\right].
\end{array}
\right.
$$

Désignons cette fonction par

$$
(\mathrm{B})\qquad \Phi(x_0, x_1, x_\omega, \ldots, x_{\omega^{p-2}});
$$

soit x'_0 une $(p+1)^{ième}$ variable, qui entre d'une manière arbitraire dans la fonction (B); faisons sur cette fonction la substitution

$$
(h)\qquad (x'_0\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_{p-1})
$$

et ses puissances, x'_1, x'_2, x'_3, etc., étant déterminées par les égalités

$$
x'_1 = x_1, \quad x'_\omega = x_{\omega^{p-2}}, \quad x'_{\omega^2} = x_{\omega^{p-3}}, \ldots, x'_{\omega^k} = x_{\omega^{p-1-k}}, \ldots;
$$

nous obtiendrons ainsi p fonctions Φ. Considérons encore la fonction

$$
(\mathrm{C})\qquad \Phi(x'_0, x'_1, x_{\omega^{p-2}}, x_{\omega^{p-3}}, \ldots, x_\omega),
$$

que nous obtenons en changeant dans la fonction (B), $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x'_0$ respectivement en $x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p-1}, x_0$; enfin, formons une fonction symétrique Θ de ces $p+1$ fonctions Φ; je dis que cette fonction n'est pas changée par les substitutions

$$
(i)\qquad (x_1\, x_\omega\, x_{\omega^2} \ldots x_{\omega^{p-2}}), \qquad (k)\qquad (x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{p-1}),
$$

et par (h), et qu'ainsi elle est trois fois transitive, et a $1.2\ldots(p-2)$ valeurs.

Il est facile de reconnaître d'abord que la fonction Θ est invariable par les substitutions (h) et (i). En effet, la fonction (B) n'est pas changée par la substitution (i), et par suite elle n'est pas changée par $(x_1\, x_\omega\, x_{\omega^2} \ldots x_{\omega^{p-2}})$ ou par

$$(i') \qquad (x'_1\, x'_\omega\, x'_{\omega^2} \ldots x'_{\omega^{p-2}});$$

donc, la fonction (B) étant invariable par la substitution (i'), si l'on fait sur la fonction (B) la substitution (h) et ses puissances, on obtiendra p fonctions, et les substitutions (h) et (i') ne feront que permuter ces p fonctions. D'ailleurs, de même que la fonction (B) n'est pas changée par les substitutions (k) et (i), la fonction (C) n'est pas changée par les substitutions (h) et (i'); donc la fonction Θ n'est pas changée par les substitutions (h) et (i'), ou par les substitutions (h) et (i).

Reste donc à démontrer que la fonction Θ est invariable par la substitution (k).

Dans la fonction Θ changeons $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x'_0$ en $x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p-1}, x_0$, nous aurons ainsi une fonction Θ', et puisque la fonction Θ n'est pas changée par la substitution (h), Θ' n'est pas changée par la substitution (k). Si donc nous démontrons que la fonction Θ' est égale à la fonction Θ, il sera démontré que la fonction Θ est invariable par la substitution (k) : c'est ce que nous allons faire.

Remarquons que les fonctions (B) et (C) entrent toutes deux dans Θ et Θ', et il s'agit de démontrer que les $p-1$ autres fonctions Φ qui entrent dans Θ sont les mêmes que les $p-1$ autres qui entrent dans Θ'; ce qui revient encore à démontrer que si l'on fait sur la fonction (B) t fois la substitution (h), on aura la même fonction que si l'on fait sur la fonction (C) u fois la substitution (k), en assignant à u une valeur convenablement choisie.

En général, si l'on a

$$x_a = x_b,$$

c'est que l'on a

$$ab \equiv 1 \pmod{p}; \quad \text{ou} \quad x_a = x'_b.$$

D'après cela, les fonctions (A) peuvent s'écrire :

$$
(\mathrm{D})\left\{\begin{array}{l}
\varphi\left[(x_0),\ x'_1,\ x'_{\frac{1}{\omega}},\ x'_{\frac{1}{\omega^2}},\ x'_{\frac{1}{\omega^3}},\ldots,\ x'_{\frac{1}{\omega^{p-2}}}\right],\\
\varphi\left[(x'_1),\ x'_{\frac{1}{2}},\ x'_{\frac{1}{1+\omega}},\ x'_{\frac{1}{1+\omega^2}},\ x'_{\frac{1}{1+\omega^3}},\ldots,\ x'_{\frac{1}{1+\omega^{p-2}}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x'_{\frac{1}{r}}\right),\ x'_{\frac{1}{r+1}},\ x'_{\frac{1}{r+\omega}},\ x'_{\frac{1}{r+\omega^2}},\ x'_{\frac{1}{r+\omega^3}},\ldots,\ x'_{\frac{1}{r+\omega^{p-2}}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x'_{\frac{1}{p-1}}\right),\ x_0,\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega}},\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^2}},\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^3}},\ldots,\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^{p-2}}}\right].
\end{array}\right.
$$

La fonction (B) est une fonction symétrique des fonctions (D). Faisons sur la fonction (B) t fois la substitution (h), la fonction qui résultera sera la fonction symétrique de ces fonctions :

$$
(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{l}
\varphi\left[(x_0),\ x'_{1+t},\ x'_{\frac{1}{\omega}+t},\ x'_{\frac{1}{\omega^2}+t},\ x'_{\frac{1}{\omega^3}+t},\ldots,\ x'_{\frac{1}{\omega^{p-2}}+t}\right],\\
\varphi\left[(x'_{1+t}),\ x'_{\frac{1}{2}+t},\ x'_{\frac{1}{1+\omega}+t},\ x'_{\frac{1}{1+\omega^2}+t},\ x'_{\frac{1}{1+\omega^3}+t},\ldots,\ x'_{\frac{1}{1+\omega^{p-2}}+t}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x'_{\frac{1}{r}+t}\right),\ x'_{\frac{1}{r+1}+t},\ x'_{\frac{1}{r+\omega}+t},\ x'_{\frac{1}{r+\omega^2}+t},\ x'_{\frac{1}{r+\omega^3}+t},\ldots,\ x'_{\frac{1}{r+\omega^{p-2}}+t}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x'_{\frac{1}{p-1}+t}\right),\ x_0,\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega}+t},\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^2}+t},\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^3}+t},\ldots,\ x'_{\frac{1}{p-1+\omega^{p-2}}+t}\right].
\end{array}\right.
$$

De même la fonction (C) est une fonction symétrique des fonctions suivantes

$$
(\mathrm{F})\left\{\begin{array}{l}
\varphi\left[(x'_0),\ x_1,\ x_{\frac{1}{\omega}},\ x_{\frac{1}{\omega^2}},\ x_{\frac{1}{\omega^3}},\ldots,\ x_{\frac{1}{\omega^{p-2}}}\right],\\
\varphi\left[(x_1),\ x_{\frac{1}{2}},\ x_{\frac{1}{1+\omega}},\ x_{\frac{1}{1+\omega^2}},\ x_{\frac{1}{1+\omega^3}},\ldots,\ x_{\frac{1}{1+\omega^{p-2}}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x_{\frac{1}{r}}\right),\ x_{\frac{1}{r+1}},\ x_{\frac{1}{r+\omega}},\ x_{\frac{1}{r+\omega^2}},\ x_{\frac{1}{r+\omega^3}},\ldots,\ x_{\frac{1}{r+\omega^{p-2}}}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

et si l'on fait sur la fonction (C) u fois la substitution (k), on aura une fonction symétrique de ces fonctions

$$
(\mathrm{G}) \left\{
\begin{array}{l}
\varphi\left[(x'_0),\ x_{1+u},\ x_{\frac{1}{\omega}+u},\ x_{\frac{1}{\omega^2}+u},\ x_{\frac{1}{\omega^3}+u},\ldots,\ x_{\frac{1}{\omega^l}+u}\right],\\
\varphi\left[(x_{1+u}),\ x_{\frac{1}{1}+u},\ x_{\frac{1}{1+\omega}+u},\ x_{\frac{1}{1+\omega^2}+u},\ x_{\frac{1}{1+\omega^3}+u},\ldots,\ x_{\frac{1}{1+\omega^l}+u}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left[\left(x_{\frac{1}{r}+u}\right),\ x_{\frac{1}{r+1}+u},\ x_{\frac{1}{r+\omega}+u},\ x_{\frac{1}{r+\omega^2}+u},\ x_{\frac{1}{r+\omega^3}+u},\ldots,\ x_{\frac{1}{r+\omega^l}+u}\right].\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Nous avons à démontrer que t étant quelconque et u convenablement choisi, les fonctions (E) sont égales aux fonctions (G) prises dans un certain ordre.

Si la première des fonctions (E) est égale à la $(r+1)^{ième}$ des fonctions (G), c'est que l'on a

$$
x_0 = x_{\frac{1}{r}+u},\quad x'_{1+t} = x_{\frac{1}{r+\omega^\beta}+u},\quad x'_{\frac{1}{\omega}+t} = x_{\frac{1}{r+\omega^{\beta+1}}+u},
$$

$$
x'_{\frac{1}{\omega^2}+t} = x_{\frac{1}{r+\omega^{\beta+2}}+u},\ldots,\qquad x'_{\frac{1}{\omega^k}+t} = x_{\frac{1}{r+\omega^{\beta+k}}+u},\ldots
$$

d'où les congruences

$$
(\mathrm{I})\quad
\left.
\begin{array}{r}
\frac{1}{r} + u \equiv 0,\\
1 + t\cdot\left(\frac{1}{r+\omega^\beta} + u\right) \equiv 1,\\
\left(\frac{1}{\omega} + t\right)\left(\frac{1}{r+\omega^{\beta+1}} + u\right) \equiv 1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{1}{\omega^k} + t\right)\left(\frac{1}{r+\omega^{\beta+k}} + u\right) \equiv 1.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right\}\ (\text{mod. } p).
$$

Au moyen des trois premières congruences, on trouve

$$(m) \qquad u \equiv \frac{1}{t}, \quad r \equiv -t, \quad \omega^\tau \equiv -t^2 \pmod{p},$$

et ces valeurs satisfont effectivement à la congruence générale (l). Ainsi la première des fonctions (E) est égale à la $(r+1)^{ième}$ des fonctions (G), si u et r ont les valeurs (m).

Recherchons maintenant si, u étant $\equiv \frac{1}{t}$, toutes les fonctions (E) sont égales aux fonctions (G); voyons donc si la deuxième des fonctions (E) est égale à la $(r+1+\tau)^{ième}$ des fonctions (G), la troisième des fonctions (E) égale à la $(r+1+2\tau)^{ième}$ des fonctions (G), etc., et, en général, si la $(v+1)^{ième}$ des fonctions (E) est égale à la $(r+1+v\tau)^{ième}$ des fonctions (G).

Si la $(v+1)^{ième}$ des fonctions (E) est égale à la $(r+1+v\tau)^{ième}$ des fonctions (G), on a

$$x_{\frac{1}{v}+t} = x_{\frac{1}{r+v\tau}+u}, \qquad x_{\frac{1}{v+1}+t} = x_{\frac{1}{r+v\tau+\omega^\tau}+u},$$

$$x_{\frac{1}{v+\omega}+t} = x_{\frac{1}{r+v\tau+\omega^{\tau+1}}+u}, \ldots, \quad x_{\frac{1}{v+\omega^k}+t} = x_{\frac{1}{r+v\tau+\omega^{\tau+k}}+u}, \ldots,$$

ce qui donne les congruences

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{v}+t\right)\left(\frac{1}{r+v\tau}+u\right) \equiv 1 \\
\left(\frac{1}{v+\omega}+t\right)\left(\frac{1}{r+v\tau+\omega^{\tau+1}}+u\right) \equiv 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n) \qquad \left(\frac{1}{v+\omega^k}+t\right)\left(\frac{1}{r+v\tau+\omega^{\tau+k}}+u\right) \equiv 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Quel que soit v, la congruence (n) est satisfaite pour les valeurs (m) de r, u et ω^τ et pour $\tau = -t^2$. Il est donc enfin démontré que la fonction Θ est trois fois transitive et n'est pas changée par les substitutions (h), (i) et (k).

Remplaçons x'_0 par x_x; la fonction Θ est invariable par les trois substitutions (i), (k), (h) qui peuvent s'écrire

$$(x_z x_{mz}), \quad (x_z x_{z+1}), \quad \left(x_z x_{\frac{z}{1+z}}\right);$$

toutes les substitutions qui laissent cette fonction invariable sont donc de la forme $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$; cette expression a p^3 valeurs, mais en supprimant les p valeurs de cette expression qui changeraient z en une constante et qui par conséquent ne peuvent représenter des substitutions, il en reste $p^3 - p$ ou $(p-1)p(p+1)$; par conséquent toutes les substitutions $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$ laissent la fonction Θ invariable.

Soient P et P′ deux fonctions semblables à Θ, et soit χ la fonction des mêmes variables qui a deux valeurs. La fonction $P + P'\chi$ est une fonction qui a $1.2\ldots(p-2) \times 2$ valeurs et qui est invariable par les substitutions

$$(x_z x_{mz}), \quad (x_z x_{z+1}); \quad \left(x_z x_{\frac{z}{1-z}}\right):$$

cette fonction est évidemment deux fois transitive.

La fonction $P + P'\chi$ est invariable par la puissance deuxième d'une quelconque des substitutions $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$; or la puissance deuxième de $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$ est

$$\left(x_z x_{\frac{(A^2+BC)z+B(A+D)}{C(A+D)z+(CB+D^2)}}\right)$$

et l'on a

$$(A^2+BC)(CB+D^2) - BC(A+D)^2 = (AD-BC)^2:$$

donc la fonction $P + P'\chi$ est invariable par toutes les substitutions $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$ pour lesquelles $AD - BC$ est un résidu quadratique.

Etude des substitutions $\left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$.

Si par la substitution

$$p \qquad \left(x_z x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right)$$

la variable x_k n'a pas été déplacée, on a

$$k \equiv \frac{Ak+B}{Ck+D} \pmod{p},$$

ce qui donne la congruence du second degré

$$Ck^2 - (A-D)k - B \equiv 0,$$

et

$$k \equiv \frac{A-D \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4(AD-BC)}}{2C}.$$

D'après cela, si l'on a

$$(A+D)^2 - 4(AD-BC) \equiv 0,$$

une seule lettre restera immobile et la substitution s'effectuera sur p variables. Si $(A+D)^2 - 4(AD-BC)$ est un résidu quadratique, deux lettres resteront immobiles et la substitution s'effectuera sur $p-1$ variables. Enfin si $(A+D)^2 - 4(AD-BC)$ est un non-résidu, la substitution s'effectuera sur $p+1$ variables.

Reportons-nous au mode de formation de la fonction Θ. La fonction Θ est une fonction symétrique de $p+1$ fonctions Φ, et, sauf la fonction (B), toutes ces fonctions se déduisent de la fonction

$$(C) \qquad \Phi(x_0, x_1, x_{\omega^p}, \ldots, x_{\omega^2}, x_\omega) = \Phi'_0,$$

en faisant sur celle-ci les substitutions $(x_z x_z)$, $(x_z x_{z+1})$, $(x_z x_{z+2})$, etc.; désignons ces fonctions respectivement par Φ'_0, Φ'_1, $\Phi'_2, \ldots, \Phi'_{p-1}$ et représentons par Φ_0 la fonction (B).

De même que les substitutions qui laissent invariable la fonction Φ_0 laissent invariable la fonction Θ, toutes les substitutions qui laissent

invariables les fonctions $\Phi'_0, \Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{p-1}$ laissent aussi invariable la fonction Θ, et ce sont les seules substitutions de p et de $p-1$ variables qui ne changent pas cette fonction trois fois transitive.

Φ'_u n'est pas changée par la substitution $\left(x_{\frac{1}{z}}\, x_{\frac{1}{z+1}}\right)$; donc Φ'_u n'est pas changée par la substitution circulaire de p variables

$$(q) \qquad \left(x_{\frac{1}{z}+u}\; x_{\frac{1}{z+1}+u}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x_z\; x_{\frac{(1+u)z-u^2}{z+1-u}}\right).$$

Nous avons p substitutions circulaires différentes en faisant

$$u = 0, 1, 2, \ldots, p-1;$$

en y ajoutant la substitution $(x_z\, x_{z+1})$, nous avons les $p+1$ substitutions circulaires de p lettres qui laissent la fonction Θ invariable.

Chacune de ces substitutions a $p-1$ puissances: on a donc p^2-1 substitutions de p lettres de la forme (p).

Cherchons maintenant les substitutions de $p-1$ variables. La fonction Φ'_u étant une fonction symétrique des fonctions (G) est invariable par les p substitutions circulaires de $p-1$ variables qui sont renfermées dans l'expression

$$(r) \qquad \left(x_{\frac{1}{r-1}-u}\; x_{\frac{1}{r-r_1}-u}\; x_{\frac{1}{r-r_1^2}-u}\cdots x_{\frac{1}{r-r_n}-u}\right),$$

et que l'on obtient en faisant

$$r = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

En donnant aussi à u les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$ dans cette expression on obtiendra p^2 substitutions; mais il est aisé de voir que ces substitutions ne sont pas toutes distinctes, et qu'il y en a qui sont les inverses des autres.

Les deux variables qui ne se trouvent pas dans la substitution (r) sont x_u et $x_{\frac{1}{r}+u}$; pareillement les deux variables qui ne sont pas permutées par

$$(s) \qquad \left(x_{\frac{1}{s-1}-u}\; x_{\frac{1}{s-r_1}-u}\; x_{\frac{1}{s-r_1^2}-u}\cdots x_{\frac{1}{s-r_n}-u}\right)$$

sont $x_{u'}$ et $x_{\frac{1}{r'}+u'}$. Donc pour que ces deux substitutions s'effectuent sur les mêmes variables, il faut que l'on ait

$$x_u = x_{\frac{1}{r'}+u'}, \quad x_{\frac{1}{r}+u} = x_{u'};$$

ce qui donne

$$u \equiv \frac{1}{r'} + u', \quad \frac{1}{r} + u \equiv u' \quad \text{mod. } p$$

ou

$$(t) \qquad r' = p - r, \quad u' \equiv \frac{1}{r} + u.$$

r' et u' ayant les valeurs ainsi déterminées, la substitution (s) est l'inverse de la substitution (r); ainsi ω^ν étant une quantité à déterminer, on a

$$x_{\frac{1}{r+1}+u} = x_{\frac{1}{r'+\omega^\nu}+u'}, \qquad x_{\frac{1}{r+\omega}+u} = x_{\frac{1}{r'+\omega^{\nu-1}}+u'},$$

$$x_{\frac{1}{r+\omega^2}+u} = x_{\frac{1}{r'+\omega^{\nu-2}}+u'}, \ldots, \qquad x_{\frac{1}{r+\omega^l}+u} = x_{\frac{1}{r'+\omega^{\nu-l}}+u'}, \ldots;$$

car cela revient aux congruences

$$\frac{1}{r+1} + u \equiv \frac{1}{r'+\omega^\nu} + u',$$

$$\frac{1}{r+\omega} + u \equiv \frac{1}{r'+\omega^{\nu-1}} + u',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{r+\omega^h} + u \equiv \frac{1}{r'+\omega^{\nu-h}} + u', \ldots,$$

et si l'on remplace r' et u' par leurs valeurs (t), ces congruences sont satisfaites pour $\omega^\nu \equiv -r^2$.

Les valeurs (t) ne sont plus admissibles dans le cas particulier où on a $r \equiv 0$, car u' serait infini ; dans ce cas la substitution (r) a pour inverse la substitution $(x_{1+u}\, x_{\omega+u}\, x_{\omega^2+u} \ldots x_{\omega^{p-2}+u})$ qui ne change pas la fonction Φ_0.

D'après cela si dans la substitution (r) nous donnons à r les valeurs

$0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, et à u les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, nous aurons $\frac{p(p+1)}{2}$ substitutions circulaires distinctes de $p-1$ variables.

La substitution (r) peut s'écrire $\left(x_{\frac{1}{r-s}+u}\quad x_{\frac{1}{r-s\omega}+u}\ \ldots\right)$, ou, en faisant $\frac{1}{r-s}+u=z$,

$$(u)\qquad \left[x_z\ x_{\frac{\left(\frac{1}{1-\omega}+ru\right)z-u(1+\omega)}{rz-ru+\frac{\omega}{1-\omega}}}\right],$$

et en faisant dans cette expression $r=0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ et $u=0, 1, 2, \ldots, p-1$, on aura les $\frac{p(p+1)}{2}$ substitutions circulaires de $p-1$ variables qui ne changent pas Θ.

En comptant les puissances de ces substitutions, on aura $\frac{p(p+1)(p-2)}{2}$ substitutions de $p-1$ variables qui ne changent pas Θ.

La puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution (r) ou (u) est $\left(x_{\frac{1}{r-s}+u}\quad x_{\frac{1}{r-s\omega^\alpha}+u}\ \ldots\right)$ ou

$$(u')\qquad \left[x_z\ x_{\frac{\left(\frac{1}{1-\omega^\alpha}+ru\right)z-u(1+\omega^\alpha)}{rz-ru+\frac{\omega^\alpha}{1-\omega^\alpha}}}\right],$$

et remarquons que la substitution (u') comme la substitution (u) ne contient pas les deux variables x_u et $x_{\frac{1}{r}+u}$.

Dans l'expression (u') la quantité $(A+D)^2-4(AD-BC)$ est $\equiv 1$, et par conséquent il est vérifié que c'est un résidu quadratique.

Cherchons maintenant les substitutions circulaires de $p+1$ variables. Remarquons d'abord que l'expression (u) peut donner la substitution (q) de p variables; pour cela divisons par r les deux termes de la fraction qui entre dans l'expression (u), la variable $x_{\frac{1}{r}+u}$ coïncidant

avec x_u, nous ferons $r = \infty$, et nous voyons alors que l'expression (u) donne la substitution (q), si l'on fait

$$\omega = 1, \quad r(1 - \omega) = 1.$$

La formule (u) peut aussi évidemment représenter les substitutions circulaires de $p+1$ variables, si l'on modifie convenablement le sens des quantités qui y entrent. Ainsi x_u et $x_{\frac{1}{r}+u}$ cessent d'exister: donc u et $\frac{1}{r}+u$ sont des imaginaires. Afin que la substitution soit d'ordre $p+1$, prenons pour ω une racine primitive de la congruence $\omega^{p+1} \equiv 1$, r et u seront alors des imaginaires telles, que $\frac{1}{r(1-\omega)} + u$, $u\left(\frac{1}{r}+u\right)$, $-u + \frac{\omega}{r(1-\omega)}$ soient des nombres entiers réels. Posons d'après cela les congruences

$$(v) \qquad \frac{1}{r(1-\omega)} + u \equiv \frac{A}{C}, \quad -u\left(\frac{1}{r}+u\right) \equiv \frac{B}{C}, \quad -u + \frac{\omega}{r(1-\omega)} \equiv \frac{D}{C},$$

A, B, C, D étant des nombres entiers réels. On tire de ces congruences

$$(w) \qquad \frac{AD - BC}{(A+D)^2} \equiv \frac{\omega}{(1+\omega)^2} \pmod{p}.$$

Posons

$$(H) \qquad \frac{AD - BC}{(A+D)^2} \equiv \frac{1}{k+2},$$

la congruence (w) deviendra

$$(I) \qquad \omega^2 - k\omega + 1 \equiv 0$$

Cette congruence étant irréductible, ses racines peuvent être représentées par ω et par ω^p, de sorte que l'on a $\omega^{p+1} \equiv 1$.

D'après cela, on cherchera une racine primitive de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$; cette racine sera $\omega = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on l'ajoutera à son inverse $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; soit k la somme : ces deux racines primitives sont les racines de (I).

k étant déterminé, on calculera A, B, C, D de manière qu'ils satisfassent à la congruence (H); remarquons que AD — BC est un non-résidu, puisqu'une substitution circulaire de $p+1$ variables change la fonction qui a deux valeurs; donc, d'après la congruence (H), $k+2$ est aussi non-résidu, et l'on satisfera à cette congruence en posant

$$AD - BC \equiv k+2, \quad A + D \equiv k+2;$$

on en tirera

$$(K) \qquad B \equiv \frac{-A^2 + (A-1)(k+2)}{C}, \quad D \equiv k+2-A.$$

Ces dernières formules ont été données par M. Serret, dans une étude de ces substitutions. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 17 janvier 1859.)

On aura ainsi les valeurs de B et D au moyen de celles de A et C, et la substitution circulaire de $p+1$ variables aura la forme (p), A, B, C, D étant des nombres entiers réels.

Il n'est peut-être pas inutile de démontrer ici que les substitutions que l'on obtient de la sorte sont bien des substitutions circulaires de $p+1$ variables. Les substitutions considérées peuvent s'écrire

$$(L) \qquad \left[x_z, \; x_{\frac{\left(\frac{1}{r(1-\omega)} + u\right)z - u\left(\frac{1}{r} + u\right)}{z - u + \frac{1}{r(1-\omega)}}} \right],$$

ω étant une racine primitive de $x^{p+1} \equiv 1$, et u et r ayant les valeurs

$$(M) \qquad u \equiv \frac{(A-1)\omega - 1}{C\omega}, \quad \frac{1}{r} \equiv \frac{1-\omega^2}{C\omega},$$

que l'on tire des congruences (ν). Donc, de même que la substitution (u) est identique à la substitution (r), la substitution (L) peut se mettre sous la forme

$$(N) \qquad \left(x_{\frac{1}{r+1}+u} \quad x_{\frac{1}{r+\omega}+u} \quad x_{\frac{1}{r+\omega^2}+u} \quad \cdots \quad x_{\frac{1}{r+\omega^p}+u} \right),$$

ce qui est évidemment une substitution circulaire de $p+1$ variables.

Dans les expressions (K), nous pouvons donner à A les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$; ce qui nous donnera $p(p-1)$ substitutions de $p+1$ variables; mais elles ne sont pas toutes distinctes, car $\frac{p(p-1)}{2}$ de ces substitutions sont les inverses des $\frac{p(p-1)}{2}$ autres. En effet, la substitution

$$(\mathrm{N}')\qquad \left(x_{\frac{1}{r'+1}+u'}\quad x_{\frac{1}{r'+\omega}+u'}\quad x_{\frac{1}{r'+\omega^2}+u'}\ \ldots\ x_{\frac{1}{r'+\omega^{\rho}}+u'}\right)$$

est l'inverse de la substitution (N), si l'on a

$$u \equiv \frac{1}{r'}+u', \quad \frac{1}{r}+u \equiv u',$$

et cela est évidemment prouvé par le raisonnement qui a servi à démontrer que la substitution (s) est l'inverse de (r), si ces deux congruences ont lieu. Représentons la substitution (N') par $\left(x_z\, x_{\frac{A'z+B'}{C'z+D'}}\right)$, et remplaçons dans les deux dernières congruences u et r par leurs valeurs (M), u' et r' par leurs valeurs analogues; ces deux congruences jointes à ces deux-ci :

$$B' \equiv \frac{-A'^2+(A'-1)(k+2)}{C'}, \quad D' \equiv k+2-A',$$

donneront

$$A' \equiv D, \quad B' \equiv -B, \quad C' \equiv -C, \quad D' \equiv A.$$

Il suit de là que si dans les congruences (K) on donne A les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, et à C seulement les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, on aura les $\frac{p(p-1)}{2}$ substitutions circulaires distinctes de $p+1$ variables.

En formant les puissances de ces substitutions, nous aurons $\frac{p^2(p-1)}{2}$ substitutions régulières de $p+1$ variables.

Ajoutons à toutes les substitutions que nous avons trouvées, la substitution $(x_z\, x_z)$, et nous reconnaissons que leur nombre est

$(p-1)p(p+1)$; nous vérifions ainsi que nous avons considéré toutes les substitutions (p).

Fonctions transitives de p^ν variables, p étant premier. — Fonction trois fois transitive de $p^\nu+1$ variables qui a $1.2\ldots(p^\nu-2)$ valeurs et fonction deux fois transitive de $p^\nu+1$ variables, qui a $1.2\ldots(p^\nu-2)\times 2$ valeurs.

Soient p un nombre premier, et i une racine d'une congruence irréductible du degré ν, $F(x)\equiv 0 \pmod{p}$; considérons l'expression

$$(1) \qquad z_0 + z_1 i + z_2 i^2 + \ldots + z_{\nu-1} i^{\nu-1},$$

dans laquelle on prend les valeurs de z_0, z_1, z_2, etc., qui sont entières par rapport au module p; cette expression est susceptible de p^ν valeurs distinctes, et, sauf la valeur zéro, ces p^ν valeurs satisfont à la congruence binôme

$$(2) \qquad z^{p^\nu-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Soit β une de ces $p^\nu - 1$ valeurs; posons

$$\beta^n \equiv 1 \pmod{p};$$

le plus petit nombre n pour lequel a lieu cette congruence est un diviseur de $p^\nu - 1$. Si ce nombre n est égal à $p^\nu - 1$, β est dite *racine primitive* de la congruence (2) [*].

Ces principes, qui sont dus à Galois, ayant été rappelés, nous voyons que nous aurons p^ν variables en mettant comme indices à la lettre x les p^ν quantités (1), et en répétant presque littéralement les raisonnements que nous venons de faire, nous pouvons étendre aux fonctions de p^ν et de $p^\nu+1$ variables, les théorèmes que nous avons démontrés pour les fonctions de p et de $p+1$ variables. Nous allons donc reprendre très-rapidement ces propositions.

Soit m une quelconque des quantités (1), la substitution $(x_z\, x_{z+m})$ est une substitution régulière composée de $p^{\nu-1}$ cycles de p lettres. Soit λ une fonction quelconque; faisons sur λ les p^ν substitutions $(x_z\, x_{z+m})$,

---

[*] J.-A. Serret, *Algèbre supérieure*, 25e leçon.

nous obtiendrons les p^ν fonctions $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p^\nu - 1}$; formons une fonction symétrique ψ de ces p^ν fonctions, nous aurons une fonction transitive invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{z+m})$.

Soient ω une racine primitive de la congruence (2), et u un diviseur de $p^\nu - 1$, faisons sur la fonction ψ la substitution régulière $(x_z\, x_{\omega^u z})$ et ses puissances, nous aurons les $\frac{p^\nu - 1}{u}$ fonctions $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, et en formant une fonction symétrique de ces fonctions, nous aurons une fonction Ψ invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{a^u z+b})$, a et b étant de la forme (1).

D'après cela, p étant un nombre premier et u un diviseur de $p^\nu - 1$, il y a toujours une fonction transitive de p^ν variables qui a

$$1.2\ldots(p^\nu - 2)\,u \text{ valeurs.}$$

Dans le cas où u est égal à 1, cette fonction est deux fois transitive.

Soit φ une fonction invariable par la substitution régulière $(x_z\, x_{\omega^u z})$; faisons sur φ toutes les substitutions $(x_z\, x_{z+m})$, et formons une fonction symétrique Φ des fonctions ainsi obtenues, Φ est aussi une fonction invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{a^u z+b})$.

Désignons par

$$\Phi(x_0, x_1, x_\omega, x_{\omega^2}, \ldots, x_{\omega^{p^\nu - 2}}),$$

une fonction deux fois transitive invariable par toutes les substitutions $(x_z\, x_{az+b})$; faisons sur cette fonction toutes les substitutions $(x'_z\, x'_{z+m})$, x'_α étant égal à $x_{\frac{1}{\alpha}}$; nous obtiendrons ainsi p^ν fonctions; ajoutons-y la fonction

$$\Phi(x'_0, x_1, x_{\omega^{p^\nu - 2}}, x_{\omega^{p^\nu - 3}}, \ldots, x_\omega);$$

enfin, formons une fonction symétrique de ces $p^\nu + 1$ fonctions, nous aurons une fonction trois fois transitive Θ invariable par toutes les substitutions

(3) $$\left(x_z\, x_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right),$$

A, B, C, D étant des quantités de la forme (1).

Soient P et P′ deux fonctions semblables à Θ, et soit χ la fonction des mêmes variables qui n'a que deux valeurs. Si p est un nombre premier autre que 2, $P + P'\chi$ est une fonction deux fois transitive qui a $1.2\ldots(p^\nu - 2) \times 2$ valeurs, et qui est invariable par toutes les substitutions pour lesquelles AD — BC est résidu quadratique.

Parlons maintenant des substitutions (3). Considérons la quantité

$$(4) \qquad (A + D)^2 - 4(AD - BC).$$

Si cette quantité est $\equiv 0$, la substitution (3) s'effectue sur p^ν variables. Si p est différent de 2, la quantité (4) est un résidu quadratique, quand la substitution s'effectue sur $p^\nu - 1$ variables. Si p est différent de 2, la quantité (4) est un non-résidu, quand la substitution s'effectue sur $p^\nu + 1$ variables.

Toutes les substitutions de p^ν variables sont des substitutions régulières composées de $p^{\nu-1}$ cycles de p lettres; elles sont renfermées dans les deux formules

$$\left[x_z, x_{\frac{(1+ur)z - u^2 r}{rz + 1 - ur}}\right], \quad (x_z, x_{z+u}).$$

Les substitutions circulaires distinctes de $p^\nu - 1$ variables sont toutes comprises dans l'expression

$$(5) \qquad \left[x_z, x_{\frac{\left(\frac{1}{1-\omega} + ru\right)z - u(1+ur)}{rz - ru - \frac{\omega}{1-\omega}}}\right],$$

ω étant une racine primitive de (2). En donnant à u et r les p^ν valeurs dont ils sont susceptibles, on aurait $p^{2\nu}$ substitutions circulaires de $p^\nu - 1$ variables; mais groupons ces substitutions deux à deux, de manière que si u et r ont les valeurs u' et r' pour l'une des substitutions, et les valeurs u'' et r'' pour l'autre, on ait

$$u' - \frac{1}{r'} \equiv u'', \quad \frac{1}{r''} + u'' \equiv u';$$

les substitutions de chaque groupe seront inverses l'une de l'autre, et par conséquent il suffira de prendre une substitution de chacun de

ces groupes. Il faut toutefois remarquer que les p^ν substitutions pour lesquelles r est $\equiv 0$, ne peuvent être groupées avec aucune autre; l'expression (5) donne donc $\frac{p^\nu(p^\nu+1)}{2}$ substitutions circulaires distinctes.

La puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution (5) s'obtient en changeant ω en ω^α.

Occupons-nous enfin des substitutions circulaires de $p^\nu+1$ variables. Ces substitutions seront encore données par l'expression

$$\left[x_z, \ x_{\frac{\left(\frac{1}{r(1-\omega)}+u\right)z - u\left(\frac{1}{r}+u\right)}{z-u+\frac{\omega}{r(1-\omega)}}} \right];$$

mais alors ω sera une racine primitive de $\omega^{p^\nu+1}\equiv 1$, et r et u seront des imaginaires de la forme $\mu_0+\mu_1\omega$, μ_0 et μ_1 étant des quantités de la forme (1). De plus, r et u devront être tels, que l'on ait

$$\frac{1}{r(1-\omega)}+u\equiv\frac{A}{C}, \quad -u\left(\frac{1}{r}+u\right)\equiv\frac{B}{C}, \quad -u+\frac{\omega}{r(1-\omega)}\equiv\frac{D}{C},$$

A, B, C, D étant des nombres de la forme (1).

On tire de ces congruences

$$(6) \qquad \frac{AD-BC}{(A+D)^2}\equiv\frac{\omega}{(1+\omega)^2},$$

on peut poser

$$(7) \qquad \frac{AD-BC}{(A+D)^2}\equiv\frac{1}{k+2},$$

k étant un nombre de même forme que A, B, C, D, et la congruence (6) devient

$$(8) \qquad \omega^2-k\omega+1\equiv 0.$$

Cette congruence doit être irréductible, et à cause de la forme de k, ses deux racines peuvent être représentées par ω et ω^{p^ν}, de sorte que l'on a $\omega^{p^\nu+1}\equiv 1 \pmod{p}$. On cherchera donc une racine primitive de la congruence $z^{p^\nu+1}\equiv 1 \pmod{p}$, on l'ajoutera à la racine primitive

inverse; soit k leur somme : ces deux racines primitives sont les racines de la congruence (8).

k étant ainsi déterminé, on calculera A, B, C, D de manière qu'ils satisfassent à la congruence (7); à cet effet on posera

$$AD - BC \equiv k + 2, \quad A + D \equiv k + 2,$$

et l'on en tirera

$$B \equiv \frac{-A^2 + (A-1)(k+2)}{C}, \quad D \equiv k + 2 - A.$$

On aura ainsi les valeurs de B et D au moyen de celles de A et C, et la substitution circulaire de $p^\nu + 1$ variables aura la forme (3), A, B, C, D étant des nombres de la forme (1).

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE VI.

De la marche des valeurs d'une fonction d'une seule variable.

68. Une fonction qui peut prendre plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable, dont elle dépend, n'est pas déterminée par la valeur de cette variable.

Cependant, si à chaque couple de valeurs de la variable et de la fonction il ne correspond qu'une seule valeur du rapport de leurs accroissements infiniment petits, la fonction sera tellement liée à sa variable, que dès qu'on aura fait choix pour l'une et l'autre de valeurs initiales, se correspondant, et réglé la marche de la variable, la fonction, assujettie à varier d'une manière continue, ne pourra plus prendre qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable.

Il convient toutefois, provisoirement, d'excepter le cas où la variable et la fonction prenant à un moment donné des valeurs auxquelles correspondît une valeur infinie ou multiple de la dérivée de la fonction, on n'aurait d'ailleurs aucun moyen de lever l'indétermination qui pèserait dès lors sur la marche ultérieure de cette fonction.

Ce cas étant excepté, si l'on a attribué à la fonction y une valeur initiale y_0, choisie parmi celles qui correspondent à la valeur initiale x_0 de la variable x, et qu'on ait fixé la marche de cette variable en établissant entre ses parties réelle et imaginaire une relation, soit arbitraire, soit imposée par la question qu'on voulait traiter, on pourra demander ce que sera devenue la fonction, lorsque la variable aura atteint une valeur quelconque x_1, prise parmi celles qu'elle peut recevoir.

Cette importante question a été posée d'abord par M. Cauchy; M. Puiseux depuis, MM. Briot et Bouquet ensuite, s'en sont occupés, et ont soit donné plus de certitude aux démonstrations, soit obtenu des résultats nouveaux, mais sans s'écarter de la méthode proposée par l'illustre maître.

69. Cette méthode est fondée sur la remarque suivante :

La variable x étant représentée par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, si pour définir sa marche, d'une valeur x_0 à une valeur x_1, on établit successivement, entre ses parties réelle et imaginaire, deux relations distinctes $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ et $\psi(\alpha, \beta) = 0$; que $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, ni $\psi(\alpha, \beta) = 0$ n'admettent comme solution aucun des couples $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., de valeurs de α et β correspondantes aux valeurs de x, pour lesquelles $\frac{dy}{dx}$ peut être infini ou indéterminé, et qu'enfin la relation $\psi(\alpha, \beta) = 0$ puisse se transformer insensiblement en $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ sans que dans aucun état intermédiaire elle admette comme solution l'un des systèmes de valeurs exceptionnelles $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., de α et β :

y, partant dans les deux cas de la même valeur initiale y_0, arrivera à la même valeur finale y_1.

Pour rendre cette idée plus claire et simplifier le langage, M. Cauchy figure le chemin qu'il fait suivre à x, par une courbe dont l'abscisse serait α et l'ordonnée β, il marque sur le même plan les points dangereux $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., par où le chemin ne doit pas passer, et il peut dès lors énoncer la proposition précédente en disant que si les chemins $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\psi(\alpha, \beta) = 0$ peuvent se réduire l'un à l'autre sans rencontrer un des points dangereux, y partant, dans les deux cas, de la même valeur initiale, arrivera à la même valeur finale.

Le principe que nous venons d'énoncer fournit immédiatement les conséquences suivantes :

1°. Si la variable x doit passer de la valeur x_0 à la valeur x_1, par un certain chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, on pourra substituer à un arc de ce chemin un autre arc quelconque ayant les mêmes extrémités, pourvu qu'aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., ne soit compris entre les deux.

2°. Si le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ est fermé, les deux extrémités x_0, x_1 se confondant, et qu'il ne comprenne dans son intérieur aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc.; la fonction y reviendra à son état primitif lorsque la variable x reprendra elle-même sa valeur initiale.

3°. Au contraire, si le chemin fermé $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne peut se réduire à un point, sans rencontrer l'un des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., en général, y ne reprendra pas sa valeur initiale en même temps que x.

4°. Si le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, non fermé, ne peut pas se réduire à un chemin convenu, la ligne droite par exemple, sans rencontrer quelques-uns des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., la valeur finale y_1 de y, correspondante à la valeur finale x_1 de x, changera selon que ce sera tel ou tel des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., qui se trouvera enclavé; selon qu'il y en aura un seul, ou deux, trois qui se trouveront enclavés.

70. La question analytique à laquelle se trouve ramenée, dans cette théorie, la question concrète proposée, consiste donc à découvrir les permutations qui pourraient s'être produites entre les valeurs initiales de y, lorsque les fonctions continues, simultanément définies par cette lettre, auraient achevé leur évolution en même temps que x.

Cette manière d'envisager la question, quoique singulière, n'offre en réalité rien de choquant, mais nous ne croyons pas qu'il eût fallu s'y arrêter.

Les points singuliers autour desquels tout tourne, dans la théorie de M. Cauchy, se distinguent des autres par un caractère analytique saillant, à la vérité, mais actuel et subjectif. Par eux-mêmes ils n'ont rien de remarquable, ils correspondent seulement à quelques états du phénomène étudié qui, en raison de la position du point où l'on s'est placé pour voir, appartiennent au contour apparent du spectacle.

Le point de vue venant à changer, ces points si remarquables à l'instant même, autour desquels tout allait pivoter, viendront se confondre dans la masse des autres, il n'en sera plus question, et d'autres points viendront se substituer à eux dans toutes leurs prérogatives.

La théorie d'une fonction n'est cependant que la théorie d'un phénomène; si le point de vue change, les lois du phénomène étudié peuvent bien changer de forme, mais le fond en reste le même.

L'équation d'une ellipse change lorsqu'on change l'origine et la direction des axes, mais elle jouit toujours des mêmes propriétés caractéristiques; l'ordonnée n'est plus la même fonction de l'abscisse, mais les deux fonctions ne diffèrent pas à ce point que, dans la théorie de l'une, le point de contact de la courbe avec la tangente qui y serait menée parallèlement à l'axe des y, ait, naturellement, une importance capitale, qu'il va perdre entièrement dans la théorie de l'autre.

Le système des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc., forme le contour apparent du phénomène étudié, par rapport au point de vue placé à l'infini sur la ligne des y; mais il change, le phénomène étudié restant le même, chaque fois que le point de vue change; comment donc ces points seraient-ils tour à tour et d'une importance si capitale, et d'une oisiveté si complète?

La question au reste, à proprement parler, n'a été résolue que pour le cas d'un chemin fermé, enveloppant un ou plusieurs points dangereux, car la méthode adoptée pour ce cas exceptionnel ne pouvant plus être d'aucune ressource dans tout autre, et défiant l'imitation, par sa singularité même, on n'a proposé du cas général qu'une solution où l'arbitraire et le tâtonnement sont à peu pres les seules règles.

La singularité de la méthode adoptée a fait regarder la question comme beaucoup plus difficile qu'elle n'est en réalité; c'est là ce qui explique comment, ayant obtenu la solution du problème dans le cas le plus simple, on s'est contenté, pensant ne pouvoir aller au delà, d'entrevoir la possibilité d'appliquer au cas général une méthode de tâtonnements, qui eût aussi bien convenu au cas particulier, mais qu'on n'y avait pas appliquée, parce qu'elle fournit bien moins une solution qu'un expédient pour supprimer la question elle-même.

Cette méthode de tâtonnements se réduit à l'emploi de la série de Taylor pour le calcul de proche en proche de la fonction, en ménageant les écarts successifs de la variable, de manière que la série reste toujours convergente. Ce procédé convenant également bien à tous les cas, il est clair qu'admettre la solution qu'il fournit revenait à supprimer la question elle-même.

Mais, au reste, la solution de la question proposée, quel que soit l'intérêt particulier qu'elle reçoit de la théorie des intégrales, devait aussi pouvoir servir à déterminer, d'une manière certaine, les conditions de convergence de la série de Taylor, qu'on ne connaissait pas encore exactement; par cette raison il importait de la traiter par une méthode directe.

L'étude de la série de Taylor dépendait évidemment de celle de la marche et des permutations des valeurs de la fonction, et non pas l'inverse.

71. Nous aurons à revenir sur la condition que le chemin parcouru par x ne passe par aucun des points $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, etc. : sans entamer encore aucune discussion à cet égard, nous observerons toutefois que le contraire pourrait arriver, sans que la moindre indétermination pesât sur la marche ultérieure de y, si, au moment où x atteindrait une des valeurs $a + b\sqrt{-1}$, $a_1 + b_1\sqrt{-1}$, etc., y était venu prendre la valeur de l'une des racines finies et simples de l'équation qui définit cette fonction.

Nous remarquerons encore que la méthode de M. Cauchy, propre au cas où la marche de x est définie par une équation entre ses deux parties réelle et imaginaire, ne conviendrait plus, sans du moins exiger une élimination, la plupart du temps impossible à faire, au cas où la loi de progression serait donnée par une équation entre les parties réelles et imaginaires de x et de y, ou par deux ou trois équations entre ces mêmes parties et une ou deux variables intermédiaires.

Cette remarque n'est pas sans importance, car si l'on pouvait choisir à volonté la forme sous laquelle sera posée la condition nécessaire pour fixer la marche de x et de y, on pourrait, la plupart du temps, singulièrement simplifier la question. Nous avons habituellement conservé

à la condition la forme que lui donne M. Cauchy, mais notre méthode s'appliquerait, sans modifications, à tous les autres cas.

72. La question qui nous occupe, lorsque la fonction n'entre qu'au second degré dans l'équation qui la définit, est d'une simplicité telle, que nous croyons devoir traiter ce cas à part. Les équations du second degré se présentent d'ailleurs si fréquemment dans la pratique, qu'il y a lieu d'en faire l'objet d'une étude spéciale.

L'équation

$$f(x, y) = 0$$

étant du second degré par rapport à y, et d'ailleurs algébrique, donnera

$$y = P \pm \sqrt{Q},$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x qui n'auront chacune qu'une valeur pour chaque valeur de x.

x variant d'une manière continue de $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à $x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$, en suivant un chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, y partira de l'une de ses valeurs, qui correspondent à $x = x_0$, valeur que nous désignerons par y_0, et qui pourra être

$$P_0 + \sqrt{Q_0}$$

ou

$$P_0 - \sqrt{Q_0},$$

et la question sera de savoir ce que y, assujetti à varier d'une manière continue, sera devenu lorsque x aura atteint la valeur x_1.

Or la valeur finale de y se composera de la valeur finale de P, sur laquelle il ne s'élève aucun doute, et de la valeur finale de $y - P$: on pourra donc simplifier la question en prenant $y - P$ pour variable au lieu de y.

En désignant par z cette nouvelle variable, on n'aura plus à s'occuper que de l'équation

$$z^2 = Q$$

ou

$$z = \pm\sqrt{Q}.$$

Les deux valeurs de z correspondantes à une même valeur de x seront toujours différentes, et cependant une des difficultés de la question est précisément de les distinguer l'une de l'autre, de fixer le langage de manière à n'y laisser subsister aucune ambiguïté.

Notre méthode nous en donne immédiatement les moyens, car les deux solutions, qui correspondront à une même valeur de x, auront toujours leurs caractéristiques de signes contraires.

En conséquence, il suffira toujours de rechercher ce que sera devenue la caractéristique C de la solution mobile pour savoir ce que sera devenue cette solution elle-même.

Si z est parti, par exemple, de la valeur initiale

$$z_0 = \alpha'_0 + \beta_0 C_0 \sqrt{-1},$$

C_0 étant positif, sa valeur finale sera

$$z_1 = \alpha'_1 + \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

ou

$$z_1 = -\alpha'_1 - \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

suivant que C aura changé de signe un nombre pair ou un nombre impair de fois. Or il ne sera jamais difficile de savoir combien de fois C changera de signe pendant que x passera, par le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, de la valeur x_0 à la valeur x_1, puisqu'on aura deux équations entre C, α et β.

Voilà tout ce à quoi se réduirait la méthode que nous proposerions pour les équations du second degré. Il suffira de l'appliquer à quelques exemples pour montrer que la pratique en est aussi simple que la théorie.

75. La méthode que nous appliquerons aux équations de degré supérieur au second ne sera guère plus compliquée dans ses moyens, quoiqu'elle doive exiger souvent des calculs délicats; elle ne sera au reste qu'un simple prolongement de celle que nous venons d'indiquer pour les équations du second degré.

La question se réduira toujours à savoir, à chaque instant, sur quelle conjuguée de la courbe proposée le point $[xy]$ sera venu se placer et

sur quelle branche de cette conjuguée il se trouvera, car alors on pourra déterminer la valeur qu'aura prise la fonction y.

Nous observerons avant tout que s'il n'est pas impossible qu'à une même valeur imaginaire de x il corresponde deux valeurs, ou plus, de y fournissant des points d'une même conjuguée, cela du moins n'arrivera qu'exceptionnellement.

Car si entre les deux relations que fournira l'équation de la courbe et $\beta' = \beta C$, on élimine α' et β', il restera une équation entre α, β et C d'où l'on ne tirerait pour C des valeurs égales qu'autant que α et β satisferaient à une condition particulière qui, encore même exprimée, pourrait bien soit ne pas être réalisable, soit déterminer α et β [*].

74. Cela posé, les conjuguées d'une courbe $f(x, y) = 0$ se divisent en deux catégories distinctes, la première comprenant les conjuguées

---

[*] Si à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

correspondaient à la fois

$$y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}$$

et

$$y = \alpha'_1 + \beta C\sqrt{-1},$$

on pourrait, en dirigeant convenablement l'axe des x, rendre en même temps réelles les deux valeurs considérées de y, sans qu'elles cessassent de correspondre à une même valeur de x. Les deux solutions deviendraient donc

$$\begin{cases} x' = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \\ y' = \gamma', \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x' = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \\ y' = \gamma''; \end{cases}$$

ainsi les points correspondants appartiendraient à la conjuguée $C = 0$ dans le nouveau système d'axes.

Or pour qu'à une valeur de x, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il corresponde une valeur réelle de y, il faut déjà que α et β satisfassent à une certaine condition précise; et si l'on demande qu'à la valeur $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ il corresponde deux valeurs réelles de y, en général, si cette condition peut être remplie, elle déterminera α et β.

qui touchent la courbe réelle, la seconde celles qui ne la touchent pas.

Or le passage du point $[xy]$ d'une conjuguée d'une catégorie sur une conjuguée de l'autre, ne peut avoir lieu qu'au moment où ce point passe sur une conjuguée, limite commune des deux catégories, qui touche à la fois les deux enveloppes : ces passages devront être relevés avec soin, et comme d'ailleurs la conjuguée servant de lien entre les deux catégories aura généralement sa caractéristique comprise entre les caractéristiques des conjuguées de l'une et de l'autre catégorie qui la comprennent elle-même, le signe de la dérivée de C, prise par rapport à la variable indépendante, au moment où le point $[xy]$ passera sur la conjuguée limite, suffira pour décider si ce point va changer de catégorie de conjuguées ou s'il rebroussera chemin.

Les conjuguées limites, dont nous venons de parler, peuvent être en nombre quelconque; ce sont habituellement celles qui touchent la courbe réelle en ses points d'inflexion ou de rebroussement ou en ses points situés à l'infini.

2°. Si la courbe réelle a plusieurs branches [*], les conjuguées qui la touchent devront être divisées en autant de classes.

Le point $[xy]$ ne pourra se transporter d'une conjuguée appartenant à une classe sur une conjuguée appartenant à la classe voisine, qu'en traversant celle qui sert de lien entre les deux classes; d'ailleurs la caractéristique de cette dernière conjuguée sera encore habituellement comprise entre les caractéristiques des deux conjuguées de l'une et de l'autre classe qui l'avoisinent immédiatement; de sorte que si l'on a déterminé le signe de la dérivée de C par rapport à la variable indépendante, au moment du passage du point $[xy]$ sur la conjuguée limite, on pourra encore dire si le point $[xy]$ a ou non changé de classe.

Les conjuguées qui séparent les différentes classes les unes des autres sont celles qui ont pour caractéristiques 0 ou ∞ et quelques-unes de celles qui touchent la courbe réelle en ses points singuliers; la discussion préalable de la courbe les fait suffisamment connaître.

---

[*] J'entends par branches de la courbe réelle les portions fournies par les différentes valeurs de y que donne l'équation.

Les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle se divisent de la même manière en plusieurs classes, lorsque leur enveloppe imaginaire se compose de plusieurs branches ou comporte des points singuliers.

3°. Chaque conjuguée peut être composée de parties distinctes et séparées. Dans ce cas, le point $[xy]$ ne saurait se transporter de l'une sur une autre, qui en est éloignée d'une quantité finie, qu'en prenant, avant tout, son passage sur une conjuguée particulière où les deux parties en question se confondent ou aient au moins un point commun : ces passages peuvent être relevés comme tous les précédents, parce qu'ils sont toujours signalés par un caractère analytique plus ou moins saillant.

4°. Enfin chaque arc d'une conjuguée quelconque tangent à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire se trouve naturellement décomposé en deux branches par le point où il touche l'une des deux enveloppes. Le point $[xy]$ ne peut passer d'une des branches sur l'autre qu'en passant sur cette enveloppe ; nous donnons les moyens de savoir s'il change alors de branche.

75. Nous n'aurons pas à revenir dans nos explications générales sur les passages du point $[xy]$ par une conjuguée servant de lien entre les deux catégories ou entre deux classes appartenant à une même catégorie ; nous regardons comme suffisamment traitées, dans ce qui précède, les questions que pourrait soulever l'analyse des circonstances qui accompagnent ces passages.

On verra au reste, par les exemples que nous traiterons, qu'on peut toujours lever toutes les difficultés, peu considérables d'ailleurs, que présente, dans ces différents cas, l'analyse des faits.

Nous passons de suite à l'examen des questions de détail qui nécessitent des explications spéciales.

76. Quoique les solutions d'une équation

$$f(x, y) = 0$$

puissent toujours toutes se permuter les unes dans les autres, ce qui au premier abord semblerait interdire toute distinction entre elles,

nous les étudierons cependant dans trois états principaux, très différents à certains égards.

Lorsque x et y partant de valeurs réelles a, b prennent des accroissements imaginaires très-petits, le point $[xy]$ se transporte, à une très-petite distance de la courbe réelle, sur une conjuguée tangente à cette courbe en un point voisin du point $[a, b]$, dont la caractéristique diffère par conséquent très-peu du coefficient angulaire de la tangente à la courbe réelle au point $[a, b]$.

Dans ce cas, si x redevient réel sans avoir dépassé de certaines limites y, redevient en même temps réel, le point $[xy]$ repasse sur la courbe réelle, et si la partie imaginaire de x change de signe, la même chose arrive à la partie imaginaire de y; le point $[xy]$ se transporte donc sur la nouvelle conjuguée qui le contient du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord par rapport au point de contact de la courbe réelle avec la conjuguée qui le contenait

Lorsque x part d'une valeur réelle à laquelle correspond une valeur imaginaire de y et que les deux variables prennent des accroissements imaginaires très petits, le point $[xy]$ se transporte sur une conjuguée dont la caractéristique diffère peu de l'infini positif ou négatif.

Dans ce cas si x redevient réel, sans avoir dépassé de certaines limites, y reste imaginaire, et si la partie imaginaire de x change de signe, la partie imaginaire de y conserve le sien, d'où il résulte que la caractéristique du point $[xy]$ en change.

Les mêmes faits se passent dans un autre ordre, quand le point $[xy]$ passe sur la conjuguée $C = 0$: la caractéristique change alors de signe en même temps que la partie imaginaire de y.

Enfin le troisième cas que nous considérons est celui où le point $[xy]$ prend des positions voisines de l'enveloppe imaginaire : au moment où il passe sur cette enveloppe, on doit chercher à savoir à quelles conditions il changerait de branche sur sa conjuguée divisée par le point où elle touche l'enveloppe.

77. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une solution où les parties imaginaires de y et de x soient en même temps aussi petites qu'on le voudra, à laquelle par conséquent corresponde un point infiniment peu

éloigné de la courbe réelle et appartenant à une conjuguée tangente à cette courbe.

x variant d'une manière continue, le point $[xy]$ ou bien restera sur la même conjuguée, ou se transportera sur une conjuguée voisine appartenant à la même catégorie; il ne pourra d'ailleurs passer d'une branche supérieure sur une branche inférieure, ou réciproquement, sans passer sur la courbe réelle; il restera donc sur la même suite de branches tant que la partie imaginaire de x ne passera pas par zéro; mais si la partie imaginaire de x passe par zéro et change de signe, en général la partie imaginaire de y changera aussi de signe, et le point $[xy]$ passera d'une branche supérieure sur une branche inférieure, ou inversement.

En effet, représentons toujours x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et y par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$; soient en conséquence α et α' les valeurs que prennent x et y au moment où β et β' s'annulent : pour obtenir les coordonnées d'un point infiniment voisin du point $[\alpha, \alpha']$, on pourrait faire varier à la fois α et α', β et β'; mais comme en faisant varier α et α' on ne ferait que déplacer le point de départ sur la courbe réelle, ce qui ne peut avoir d'utilité, il suffira de faire varier β et β' : or C désignant la dérivée de y par rapport à x au point $x = \alpha$, $y = \alpha'$, ou la caractéristique de la conjuguée qui toucherait la courbe réelle en ce point; si x prend la valeur $\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, y deviendra $\alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}$, le point

$$\left[\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ \alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}\right]$$

restera donc sur la conjuguée C; mais, suivant que $d\beta$ sera positif ou négatif, le point

$$\left[\alpha + d\beta\sqrt{-1},\ \alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}\right]$$

se trouvera d'un côté ou de l'autre du point $[\alpha, \alpha']$.

78. Passons aux solutions du second groupe.

Les valeurs imaginaires de y, tirées d'une équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

sont conjuguées deux à deux lorsque x est réel, et elles conservent

une certaine trace de ce caractère initial lorsque x varie ensuite par valeurs imaginaires dans de certaines limites; c'est-à-dire que lorsque x prend des valeurs imaginaires voisines de sa valeur réelle initiale, les valeurs imaginaires de y qui dérivent de celles qui étaient conjuguées deux à deux, restent d'abord à peu près conjuguées, ou telles, qu'en les rangeant deux à deux convenablement, on en trouverait les parties réelles peu différentes et les parties imaginaires à peu près égales et de signes contraires.

Or de deux points ayant ainsi leurs abscisses à peu près égales et presque réelles et leurs ordonnées à peu près conjuguées, l'un appartiendra évidemment à une branche supérieure d'une conjuguée et l'autre à une branche inférieure d'une conjuguée infiniment voisine.

Au reste, les caractéristiques de ces deux conjuguées seront évidemment de signes contraires.

Car si x passe de la valeur α à la valeur $\alpha + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, dans les deux valeurs correspondantes de y, $\alpha' \pm \beta'\sqrt{-1}$, les parties imaginaires qui étaient finies resteront d'abord de signes contraires.

Cela posé, il est clair qu'un point

$$x = \alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + (\beta' + d\beta')\sqrt{-1},$$

s'il se trouve sur une branche supérieure de la conjuguée à laquelle il appartient, ne pourra passer sur une branche inférieure d'une conjuguée voisine, qu'en passant sur la courbe réelle ou son enveloppe imaginaire, suivant que la branche de la conjuguée $C = \infty$, qui contiendrait le point voisin

$$x = \alpha,$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

toucherait l'une ou l'autre enveloppe; il est de même évident que la caractéristique du point mobile ne pourra changer de signe pour de très-petits écarts de x, qu'au moment où ce point repasserait sur la conjuguée $C = \infty$, c'est-à-dire quand x reprendrait une valeur réelle.

79. Nous arrivons maintenant aux solutions du troisième groupe.

Lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, le point $[xy]$ se trouve momentanément sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, et il s'agit de savoir s'il va passer du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord, par rapport au point de contact de sa conjuguée avec l'enveloppe.

La solution de cette question se préjuge aisément : tant que $\frac{dy}{dx}$ reste imaginaire, le point $[xy]$ reste, sur la conjuguée à laquelle il appartient, du même côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire ; lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, le point $[xy]$ vient se placer sur l'enveloppe ; et si la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ reparaît, mais affectée du signe contraire, il y a lieu de penser que le point $[xy]$, ayant poursuivi son chemin, est venu se placer sur une nouvelle conjuguée, de l'autre côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point de l'enveloppe imaginaire ; $\frac{dy}{dx}$ en ce point sera réel et égal à p ; $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera généralement imaginaire et égal à $r + s\sqrt{-1}$; si x prend un accroissement $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, l'accroissement correspondant de y sera

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})\,p,$$

et celui de $\frac{dy}{dx}$

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1});$$

notons en passant que pour rester sur l'enveloppe, il faudrait faire

$$s\,d\alpha + r\,d\beta = 0;$$

mais supposons que nous voulions rester sur la même conjuguée ; pour cela, il faudrait que la caractéristique ne variât pas, c'est-à-dire que

le rapport des parties imaginaires de dy et de dx fût aussi égal à C; mais, avant tout, il doit être égal à p; or p et C diffèrent généralement l'un de l'autre, de sorte que pour remplir en même temps les deux conditions, il faut faire $d\beta$ et, par suite, $d\beta'$ nuls.

Alors l'accroissement de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à

$$(r + s\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

et l'on voit que le signe de sa partie imaginaire change avec le signe de $d\alpha$.

Ainsi trois points infiniment voisins d'une même conjuguée, pour lesquels la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ est positive, nulle, négative, ou négative, nulle, positive, sont tels que

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} - d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - p\,d\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + p\,d\alpha. \end{cases}$$

On voit que le point situé sur l'enveloppe est entre les deux autres.

De l'indétermination qu'on a laissé peser sur la marche ultérieure de la fonction, à partir du moment où elle prenait une valeur infinie ou multiple.

80. Nous avons déjà fait remarquer que si la fonction y, partant d'une valeur y_0 correspondante à la valeur initiale x_0 de la variable x, doit prendre une valeur y_1 qui ne soit ni multiple ni infinie, au moment où x atteint une de ses valeurs singulières $a + b\sqrt{-1}$, $a_1 + b_1\sqrt{-1}$, etc., le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ peut parfaitement passer par le point correspondant $[a, b]$ ou $[a_1, b_1]$, etc., sans qu'il en résulte pour y la moindre indétermination.

Nous n'apercevons pas davantage cette prétendue indétermination, lorsque y prend une valeur multiple ou infinie.

Au reste, il est de notion commune en mathématiques que l'indétermination n'affecte jamais que les questions mal posées : on peut toujours la faire disparaître en précisant davantage.

81. Le cas le plus simple est celui où les valeurs singulières de x et de y sont les coordonnées d'un point multiple de la courbe dont on étudie l'équation ; nous le traiterons le premier.

Remarquons d'abord que si l'on a assujetti x et y à la condition de continuité, c'est parce que la solution de la question abstraite qu'on se proposait devait fournir celle d'une question concrète correspondante : or croit-on que, dans l'accomplissement d'un phénomène naturel, les variables expressément dénommées soient seules assujetties à croître d'une manière continue? Assurément toutes celles qui en dépendent et qu'on n'a pas introduites dans le calcul, leurs dérivées partielles, par exemple, de quelque ordre qu'elles soient, sont soumises à la même loi. Ainsi, les trois coordonnées d'un mobile ne sauraient évidemment varier que d'une manière continue, mais pour que le mouvement de ce mobile satisfasse vraiment aux conditions de continuité, il faudra encore que la vitesse, l'accélération, etc., à l'infini, varient elles-mêmes d'une manière continue.

Si donc y prend n valeurs égales à y_1 pour une même valeur x_1 de x, et que les n valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$ soient différentes, pourquoi, puisqu'on avait assujetti expressément y et implicitement jusque-là $\frac{dy}{dx}$ à la loi de continuité, pourquoi n'avoir pas déterminé la question en stipulant que $\frac{dy}{dx}$, qui n'avait pu varier que d'une manière continue, serait encore, au moment du passage de x par le point dangereux, assujetti à continuer d'obéir à la même loi?

Le point $[xy]$, au moment où il parvient en un point multiple

$$\left| a + b\sqrt{-1},\ a' + b'\sqrt{-1} \right|$$

du lieu $f(x,y) = 0$, vient de décrire un élément curviligne tangent

à l'une des droites représentées dans le système $C = \frac{b'}{b}$ par les équations

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1),$$

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 (x - x_1),$$

. . . .

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_n (x - x_1):$$

or ces droites étant supposées différentes, pourquoi ne pas assujettir l'élément suivant du chemin décrit par le point $[xy]$ à rester tangent à la même droite?

Si quelques-unes des droites

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1),$$

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 (x - x_1),$$

. . . .

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_n (x - x_1),$$

se trouvaient confondues, pourquoi ne pas lever la nouvelle indétermination qui se présenterait, en assujettissant à la loi de continuité $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$,..., jusqu'à ce que la séparation s'opérât d'elle-même?

82. L'indétermination est un peu plus difficile à lever lorsque les valeurs singulières de x et de y sont les coordonnées d'un des points du contour apparent, par rapport à l'axe des x, du lieu proposé, mais il est en quelque sorte plus important encore de la faire disparaître dans ce cas que dans le précédent, car la laisser subsister alors reviendrait pour ainsi dire à l'introduire partout; puisque, pour la faire naître, il suffirait, si $\frac{dy}{dx}$ devenait une seule fois réel, de placer d'avance le point de vue sur une parallèle à la tangente menée au point corres-

pondant du lieu, de diriger l'axe des y parallèlement à cette tangente. Il arriverait de là qu'une question qu'on aurait traitée, dont on aurait la solution, aurait été indéterminée si l'on avait placé autrement le point de vue! Cela répugne évidemment.

L'inconnue de la question conserve la même valeur, quelque part qu'on mette le point de vue, tant que l'indétermination ne se présente pas; si donc elle se présente, parce qu'on a mal dirigé l'axe des y, la seule chose à faire est de le diriger autrement et de recommencer le calcul.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1},$$

$$y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1},$$

les valeurs initiales de la variable et de la fonction;

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

des valeurs quelconques que prennent en même temps x et y, x ayant varié d'une manière continue à partir de $x = x_0$, en suivant le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, et y ayant aussi varié d'une manière continue à partir de $y = y_0$.

Soient enfin

$$x = m x_1 + n y_1,$$

$$y = m' x_1 + n' y_1,$$

les formules de transformations correspondantes au changement qu'on voudra faire subir aux axes, et

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1},$$

$$y_1 = \alpha'_1 + \beta'_1\sqrt{-1},$$

les valeurs de x_1 et de y_1 correspondantes à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}.$$

On aura entre $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ les cinq équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = m(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}) + n(\alpha'_1 + \beta'_1\sqrt{-1}),$$

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = m'(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}) + n'(\alpha'_1 + \beta'_1\sqrt{-1}),$$

auxquelles il faudra adjoindre l'équation nouvelle de la courbe, ce qui fera en tout sept équations, de sorte qu'une seule des variables $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ sera arbitraire.

Ces sept équations définiront explicitement ou implicitement un chemin

$$\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$$

parfaitement équivalent à $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; de telle sorte que le point $[x_1 y_1]$ assujetti à partir de la même position initiale que le point $[xy]$ suivra exactement le même chemin que lui. Mais alors quand la nouvelle abscisse x_1 prendra la valeur correspondante à la valeur singulière $a + b\sqrt{-1}$ de l'ancienne, la nouvelle ordonnée habituellement ne prendra plus des valeurs égales, ou il faudrait qu'on eût encore mal placé le point de vue.

A la vérité, le point du chemin $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ qui correspondra au point dangereux $[a, b]$ sera toujours multiple, et autant de branches du lieu $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ y passeront, que y prenait de valeurs égales pour $x = a + b\sqrt{-1}$, parce que le chemin $\psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ conduisant chacun des points $[x_1 y_1]$ par la même route qu'il aurait suivie dans l'ancien système d'axes, comme plusieurs des points $[xy]$ venaient occuper une même position, il faudra bien que les routes des points $[x_1 y_1]$ passent aussi par cette position. Mais tandis que quelques-uns des points $[xy]$ venaient *en même temps* occuper une même place, les points $[x_1 y_1]$ correspondants n'y passeront plus que *séparément*.

Le changement d'axes le plus simple consistera habituellement dans une substitution de l'axe des x à l'axe des y, et réciproquement.

Nous prendrons pour exemple l'équation

$$y^2 = 2px,$$

et nous supposerons le chemin défini par l'équation

$$\beta = \alpha.$$

Si nous faisons tourner les axes de 90 degrés, les formules de transformation seront

$$x = -y_1,$$
$$y = x_1;$$

de sorte que x et y étant représentés respectivement par

$$\alpha + \alpha\sqrt{-1},$$

et

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

x_1 et y_1 le seront par

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

et

$$-\alpha - \alpha\sqrt{-1};$$

on aura d'ailleurs entre α, α', β' les deux équations tirées de $y^2 = 2px$:

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = 2p\alpha,$$
$$2\alpha'\beta' = 2p\alpha,$$

d'où l'on conclura, pour définir le nouveau chemin,

$$\beta'^2 + 2\alpha'\beta' - \alpha'^2 = 0$$

ou

$$\beta' = \alpha'(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Cela posé, soit par exemple

$$x_0 = p(1 + \sqrt{-1})$$

la valeur initiale de x, et

$$y_0 = p\sqrt{1 + \sqrt{2}} + p\sqrt{-1 + \sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

la valeur initiale de y.

Les valeurs initiales de x_1 et de y_1 seront donc

$$x_{1,0} = p\sqrt{1+\sqrt{2}} + p\sqrt{-1+\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

et

$$y_{1,0} = -(1+\sqrt{-1});$$

or c'est la partie

$$\beta' = \alpha'(-1-\sqrt{2})$$

du nouveau chemin qui comporte ces valeurs initiales; par conséquent, il faudra dans l'équation

$$x_1^2 = -2py_1,$$

ou

$$y_1 = -\frac{x_1^2}{2p}$$

assujettir x_1, représenté par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, à suivre le chemin

$$\beta' = \alpha'(-1+\sqrt{2}),$$

pour que le point $[x_1 y_1]$ décrive la même route que le point $[xy]$, et si $\frac{dy_1}{dx_1}$ reste continu quand x_1 et y_1 passeront en même temps par zéro, le chemin ne pourra pas se changer en

$$\beta' = \alpha'(-1-\sqrt{2});$$

par conséquent, quelle que soit la valeur finale de x, il faudra parmi les deux valeurs correspondantes de y choisir celle qui satisfera à la condition

$$\beta' = \alpha'(-1+\sqrt{2}).$$

85. Le cas où y prend une valeur infinie n'est pas plus difficile à traiter que les deux précédents.

Lorsqu'une question concrète aura donné lieu à considérer une des variables dénommées, dans un état de grandeur dépassant toute limite, cette même question, si elle est bien posée, fournira toujours un moyen de savoir comment la variable considérée revient de l'infini.

L'infini n'est encore que relatif, il ne se présente que quand on ne veut pas l'éviter : à telle variable qui devient infinie dans les équations qu'on a posées pour traiter la question, il en correspond des milliers d'autres qui auraient pris des valeurs correspondantes finies ; c'est à l'opérateur à substituer à propos l'une d'elles à celle qui tombe dans un cas singulier.

Par exemple, quand le point $[xy]$ passait sur la conjuguée dont les abscisses sont réelles, aurais-je été bien venu à prétendre que C devenant infini, sa marche ultérieure allait être affectée d'indétermination ?

Si y devient infini, on étudiera la marche d'une autre variable qui ne devienne pas infinie en même temps que y : par exemple, on étudiera la marche de $\frac{1}{y}$, les variations de $\frac{1}{y}$ fourniront sans difficulté celles de y.

84. L'analyse que nous venons de présenter nous paraît établir clairement que la question ne comporte jamais de difficultés d'un autre ordre que celles qu'on rencontre généralement dans la discussion des courbes ; toute la différence consiste en ce qu'au lieu d'une seule courbe, la question, par sa nature même, en embrasse une infinité. Mais elle ne sort pas pour cela des bornes de la géométrie analytique élémentaire.

D'un autre côté, les moyens que nous avons fournis nous paraissent suffisants pour lever toutes les difficultés ; nous ne chercherons donc pas à prévoir tous les cas qui pourraient se présenter, à les classer et à obtenir des formules donnant d'avance des résultats tout calculés.

Nous nous bornerons à discuter quelques exemples simples : chacun reconnaîtra qu'il pourrait aisément en traiter d'autres.

MÉMOIRE

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES

DES

COORDONNÉES DES PLANÈTES ET DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. PUISEUX.

On fait dans l'astronomie un usage fréquent des formules qui expriment les coordonnées d'une planète par des séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples de l'anomalie moyenne. Pour toutes les valeurs réelles de cet angle, les séries dont il s'agit restent convergentes; mais il n'en est plus de même quand on lui attribue des valeurs imaginaires : si l'on cherche alors les conditions de convergence, on est conduit à prendre pour variable, au lieu de l'anomalie moyenne elle-même, l'exponentielle imaginaire dont elle est l'argument. La considération de cette variable nouvelle permet, non-seulement d'assigner avec facilité les limites dans lesquelles les développements des coordonnées restent convergents, mais encore, comme l'a remarqué M. Cauchy, de calculer sans peine les termes généraux de ces développements; il y a plus : la même méthode appliquée à la fonction perturbatrice fournit le terme général de cette fonction développée suivant les sinus et cosinus d'arcs multiples des anomalies moyennes de deux planètes. Les coefficients du sinus et du cosinus d'un argument donné s'obtiennent ainsi directement sous la forme de séries procédant suivant les puissances entières des deux excentricités, du sinus de la demi-inclinaison mutuelle des orbites et du rapport des grands axes, c'est-à-dire sous la forme la plus appropriée à l'usage qu'on en fait dans la Mécanique céleste.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES COORDONNÉES D'UNE PLANÈTE.

Nommons X, Y, Z les coordonnées d'une planète rapportées à trois axes rectangulaires quelconques passant par le centre du Soleil, et soient ξ, η les coordonnées du même astre par rapport à deux axes rectangulaires situés dans le plan de l'orbite, le premier étant dirigé vers le périhélie; on aura

$$X = A\xi + A_1\eta, \quad Y = B\xi + B_1\eta, \quad Z = C\xi + C_1\eta,$$

A, B, C, A_1, B_1, C_1 désignant des quantités qui restent constantes dans le mouvement elliptique.

Appelons ζ l'anomalie moyenne, u l'anomalie excentrique, r le rayon vecteur, a le demi grand axe de l'orbite, e l'excentricité; nous aurons les formules connues

$$u - e\sin u = \zeta, \quad r = a(1 - e\cos u), \quad \xi = a(\cos u - e),$$

$$\eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin u.$$

Si maintenant nous posons

$$E^{i\zeta} = z, \quad E^{iu} = s,$$

E désignant la base des logarithmes népériens, et i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

qu'on peut écrire

$$E^{iu - ie\sin u} = E^{i\zeta},$$

nous donnera

(1) $$sE^{-\frac{e}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} = z,$$

et nous aurons de plus

$$r = a\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right], \quad \xi = \frac{a}{2}\left(s + \frac{1}{s} - 2e\right), \quad \eta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{2i}\left(s - \frac{1}{s}\right).$$

Ainsi s étant une fonction transcendante de z assujettie à vérifier l'é-

quation (1), r, ξ, η, et par suite X, Y, Z sont des fonctions rationnelles de s [*].

Ajoutons d'ailleurs qu'en vertu des formules

$$z^m = \cos m\zeta + i \sin m\zeta, \quad z^{-m} = \cos m\zeta - i \sin m\zeta,$$

la recherche du développement d'une fonction de X, Y, Z suivant les sinus et cosinus des multiples de ζ revient à celle du développement de la même fonction suivant les puissances entières, positives et négatives de z.

Avant de nous occuper de ce développement, il nous faut d'abord définir nettement la fonction de z désignée par s. On reconnaît aisément que pour chaque valeur de z l'équation (1) fournit une infinité de valeurs de s. En effet, soit

$$z = \mathrm{E}^{p+iq}, \quad s = \mathrm{E}^{x+iy},$$

p, q, x, y désignant des nombres réels; en représentant, pour abréger, par $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ le sinus et le cosinus hyperboliques de x, c'est-à-dire les deux fonctions

$$\frac{\mathrm{E}^x - \mathrm{E}^{-x}}{2}, \quad \frac{\mathrm{E}^x + \mathrm{E}^{-x}}{2},$$

on partagera l'équation (1) dans les deux suivantes:

$$(2) \quad x - e\,\mathrm{S}(x) \cos y = p, \qquad (3) \quad y - e\,\mathrm{C}(x) \sin y = q. \text{ [**]}$$

Les valeurs de x et de y qui satisfont à ces deux équations peuvent être considérées comme les coordonnées des points communs aux deux courbes qu'elles représentent par rapport à deux axes rectangulaires.

---

[*] M. Cauchy a déjà remarqué et utilisé la propriété dont jouissent les coordonnées d'une planète d'être des fonctions rationnelles de la variable s (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX et XX).

[**] On pourrait au second membre de l'équation (3) ajouter un multiple arbitraire de 2π : les valeurs de y qui satisfont aux équations (2) et (3) seraient alors augmentées du même multiple de 2π; mais les valeurs correspondantes de s resteraient les mêmes. La considération de ce multiple est donc inutile dans la recherche des racines de l'équation (1).

En construisant ces courbes, on reconnaît qu'elles ont une infinité de points d'intersection formant deux séries situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté de l'axe des y. Dans chacune de ces séries, lorsqu'on s'éloigne suffisamment de l'axe des x, les ordonnées tendent à devenir égales aux termes de la suite $\pm\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$, k désignant un nombre entier positif; les valeurs numériques des abscisses croissent indéfiniment en même temps que celles des ordonnées, mais moins rapidement.

On arrive aux mêmes conclusions en cherchant les expressions approchées des coordonnées des points d'intersection très-éloignés de l'origine. L'équation (3) montre d'abord que pour x très-grand, y doit être très-grand, ou bien $\sin y$ très-petit; d'un autre côté, l'équation (2) donne alors pour $\cos y$ une valeur positive très-petite : ainsi l'hypothèse de $\sin y$ très-petit doit être rejetée, et il faut que y soit très-grand et de plus très-voisin d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Faisons donc

$$y = 2m\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

m désignant un très-grand nombre entier, positif ou négatif, et ε un très-petit angle positif.

Soit d'abord $m > 0$; l'équation (2) donnant pour $\sin y$ une valeur positive, il faudra dans l'expression précédente de y rejeter le signe inférieur et prendre

$$y = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon;$$

il en résulte, en désignant par α, β, γ des nombres très-petits,

$$\mathrm{C}(x) = \frac{2m\pi}{\varepsilon}(1+\alpha), \quad \mathrm{E}^{\pm x} = \frac{4m\pi}{\varepsilon}(1+\beta), \quad x = \pm\log\frac{4m\pi}{\varepsilon} + \gamma.$$

Soit en second lieu $m < 0$; il faut alors que $\sin y$ soit négatif : on prendra donc, en mettant le signe de m en évidence,

$$y = -\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon,$$

et on en conclura encore

$$x = \pm\log\frac{4m\pi}{\varepsilon} + \gamma.$$

A de très-grandes valeurs de x répondent, suivant que x est positive ou négative, des valeurs de s dont le module est très-grand ou très-petit. On voit donc que les valeurs de s dont le module est très-grand sont les produits par un facteur très-voisin de 1 des valeurs de l'expression $\pm \frac{4m\pi}{c} i$, et que les valeurs de s dont le module est très-petit sont les produits par un facteur très-voisin de 1 des valeurs de l'expression $\pm \frac{c}{4m\pi} i$ [*]. Il s'ensuit que R étant supposé positif et très-grand, $\frac{c\mathrm{R}}{2\pi}$ est approximativement le nombre des valeurs de s dont le module est compris entre 1 et R, et que c'est aussi le nombre

---

[*] Si l'on désirait des expressions plus approchées des valeurs de s qui ont des modules très-grands ou très-petits, on les trouverait par les formules suivantes. L'entier m étant toujours supposé positif et très-grand, soit

$$\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi - q = a, \quad \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi + q = b,$$

et représentons par M un nombre tel, que le rapport $\frac{\mathrm{M}}{m^\alpha}$ soit infiniment petit pour m infiniment grand, quel que soit l'exposant positif α : les deux expressions

$$\frac{2a}{c} i + \frac{2}{c}\left(\log\frac{2a}{c} - p\right) - \left[\frac{2}{ac}\left(\log\frac{2a}{c} - p\right) + \frac{c}{2a}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{a^2},$$

$$-\frac{2b}{c} i + \frac{2}{c}\left(\log\frac{2b}{c} - p\right) + \left[\frac{2}{bc}\left(\log\frac{2b}{c} - p\right) + \frac{c}{2b}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{b^2},$$

fourniront pour chaque valeur de m deux valeurs de s à modules très-grands, et de même les deux expressions

$$\frac{1}{-\frac{2a}{c} i + \frac{2}{c}\left(\log\frac{2a}{c} + p\right) + \left[\frac{2}{ac}\left(\log\frac{2a}{c} + p\right) + \frac{c}{2a}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{a^2}},$$

$$\frac{1}{\frac{2b}{c} i + \frac{2}{c}\left(\log\frac{2b}{c} + p\right) - \left[\frac{2}{bc}\left(\log\frac{2b}{c} + p\right) + \frac{c}{2b}\right] i + \frac{\mathrm{M}}{b^2}}$$

fourniront pour chaque valeur de m deux valeurs de s à modules très-petits.

approximatif des valeurs de s dont le module est compris entre 1 et $\frac{1}{R}$.

Pour chaque valeur de z l'équation (1) peut être considérée comme ayant un nombre infini de racines égales à zéro et aussi un nombre infini de racines égales à l'infini; mais les valeurs finies de s sont généralement inégales.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs particulières de z deux des valeurs finies de s peuvent être égales entre elles. Chacune de ces valeurs de z, jointe à une valeur convenable de s, devra vérifier à la fois les deux équations

$$sE^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} - z = 0, \quad E^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right] = 0,$$

dont la seconde s'obtient en égalant à zéro la dérivée prise par rapport à s du premier membre de la première. On conclut de là, en excluant les valeurs nulles ou infinies de s,

$$1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) = 0.$$

Si l'on appelle ψ l'angle aigu dont le sinus est égal à e, les deux racines de cette dernière équation seront

$$s_1 = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}, \quad s_2 = \cot\frac{\psi}{2},$$

et les valeurs correspondantes de z seront

$$z_1 = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\,E^{\cos\psi}, \quad z_2 = \cot\frac{\psi}{2}\,E^{-\cos\psi}.$$

Pour chacune de ces valeurs de z, deux des valeurs finies de s fournies par l'équation (1) sont égales entre elles : pour toute autre valenr finie de z, les racines finies de cette même équation sont toutes inégales. Observons d'ailleurs que z_1 et z_2 sont des nombres réels et positifs ainsi que s_1 et s_2 et qu'on a

$$z_1 z_2 = 1, \quad s_1 s_2 = 1, \quad s_1 < 1, \quad s_2 < 1 ;$$

de plus la dérivée de z_1 par rapport à ψ, savoir $\frac{E^{\cos\psi}\cos^2\psi}{2\cos^2\frac{\psi}{2}}$, étant essentiellement positive, on en conclut que z_1 augmente lorsque ψ croît de 0 à 90 degrés; mais pour $\psi = 90^\circ$, on a $z_1 = 1$; donc pour une valeur quelconque de ψ inférieure à 90 degrés, on a $z_1 < 1$ et par suite $z_2 > 1$.

Imaginons à présent qu'à chaque valeur $z = a + ib$ du paramètre z on fasse répondre sur un plan le point Z qui a pour abscisse a et pour ordonnée b : soit z_0 une valeur particulière de z et nommons σ une des valeurs finies de s qui satisfont à l'équation

$$s E^{-\frac{e}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = z_0.$$

Cela posé, concevons que le point Z, partant de la position initiale Z_0 correspondante à z_0, décrive un chemin quelconque $Z_0 M$, et prenons σ pour valeur initiale de s. Pour qu'on soit assuré que la fonction s, assujettie à varier d'une manière continue avec z, aura en chaque point du chemin $Z_0 M$ une valeur unique et parfaitement déterminée, il faudra : 1° que la ligne $Z_0 M$ ne passe par aucun des deux points Z_1, Z_2 correspondants aux valeurs z_1 et z_2 de z qui font acquérir à l'équation (1) des racines égales de valeurs finies ; 2° que sur la même ligne $Z_0 M$ notre fonction s ne puisse se réduire à zéro ou grandir jusqu'à l'infini. Cette seconde condition n'est pas moins nécessaire que la première, puisque pour chaque valeur de z on peut regarder zéro ou l'infini comme des racines multiples de l'équation (1) : j'ajoute qu'elle sera remplie, si aucun point du chemin $Z_0 M$ n'est à une distance nulle ou infinie de l'origine des coordonnées.

En effet, le chemin $Z_0 M$ satisfaisant aux conditions qu'on vient d'énoncer, admettons, s'il est possible, que s y devienne infinie, et soit Q le point où cela arriverait pour la première fois : nommons P un point qui précède Q sur le chemin $Z_0 M$ et qui en soit très-voisin. De P en Q la valeur de s serait très-grande et dans l'équation différentielle

$$ds = \frac{s}{1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\frac{dz}{z} = -\frac{dz}{\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{s}+\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{s^2}\right)z}.$$

on pourrait, à la place du facteur $\frac{e}{2} - \frac{1}{s} + \frac{e}{2}\cdot\frac{1}{s^2}$, écrire $\frac{e}{2}(1+\omega)$, ω étant très-petit; il viendrait ainsi

$$ds = -\frac{2\,dz}{(1+\omega)\,ez}.$$

D'un autre côté, en posant

$$z = \rho\,\mathrm{E}^{i\theta},$$

où ρ et θ sont supposés réels et ρ positif, on a

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + i\,d\theta,$$

d'où

$$\text{module de } \frac{dz}{z} = \sqrt{\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2},$$

ou encore

$$\text{module de } \frac{dz}{z} = \frac{d\lambda}{\rho},$$

$d\lambda$ désignant la différentielle de l'arc décrit par le point Z. On aurait donc, en appelant μ le minimum du module de $1 + \omega$ le long du chemin PQ, et ρ' le minimum de ρ ou la plus courte distance de l'origine à l'arc PQ,

$$\text{module de } ds < \frac{2\,d\lambda}{\mu\rho' e}.$$

On déduit de là que le module de l'accroissement de s, quand on passe du point P au point Q, serait moindre que la quantité finie $\frac{2l}{\mu\rho' e}$, l étant la longueur de l'arc PQ. Il est donc impossible que la fonction s devienne infinie au point Q.

De là il est aisé de conclure que la fonction s ne peut pas non plus devenir nulle le long du chemin Z_0M; car soit

$$z = \frac{1}{z'}, \quad s = \frac{1}{s'}.$$

on aura entre z' et s' l'équation

$$s' \mathrm{E}^{-\frac{r}{2}\left(s'-\frac{1}{s'}\right)} = z',$$

qui est toute pareille à l'équation (1). Au chemin $Z_0 M$ décrit par le point Z correspondra un chemin $Z'_0 M'$ décrit par le point Z', et si aucun point du premier chemin n'est à une distance nulle ou infinie de l'origine des coordonnées, il en sera de même sur le second. D'après ce qu'on vient de démontrer, la fonction s' ne pourra pas devenir infinie; la fonction s ne pourra donc pas devenir nulle.

Les conditions nécessaires pour que la fonction s ait une valeur unique et finie en chaque point du chemin $Z_0 M$ se trouveront remplies



en particulier, si l'on suppose ce chemin entièrement renfermé dans l'espace G compris entre les deux circonférences décrites de l'origine O comme centre avec des rayons OB et OC égaux à z_1 et à z_2. On peut donc dire, en se limitant à cet espace, que l'équation (1) définit une infinité de fonctions de z qui ont pour valeurs initiales les diverses racines de l'équation

$$s \mathrm{E}^{-\frac{r}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = z_0$$

et qui restent toujours distinctes les unes des autres, pendant que le point Z décrit le chemin quelconque $Z_0 M$.

Dans ce qui va suivre, non-seulement nous admettrons que le point Z ne sorte pas de l'espace G, mais encore nous prendrons $z_0 = 1$ pour la valeur initiale de z et nous considérerons spécialement celle des fonctions s dont la valeur initiale est elle-même égale à 1. Cette fonction particulière, que nous désignerons seule dorénavant par la lettre s, jouit seule aussi de la propriété de reprendre toujours la même valeur, quand le point Z repasse par une position qu'il a déjà occupée.

Pour le démontrer, supposons d'abord que le point Z reste sur la circonférence AP décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à 1 : on pourra poser alors $z = E^{i\zeta}$, ζ désignant un angle réel; et si l'on fait en même temps $s = E^{iu}$, on voit qu'on satisfera à l'équation (1) en prenant pour u l'angle réel donné par l'équation $u - e \sin u = \zeta$, c'est-à-dire l'anomalie excentrique correspondante à l'anomalie moyenne ζ. Il existe donc une fonction s qui a pour expression E^{iu} tant que le point Z reste sur la circonférence AP, et comme elle se réduit à l'unité quand le point Z occupe la position A pour laquelle $z = 1$, cette fonction est bien celle que nous sommes convenu de désigner exclusivement par la lettre s.

Nous voyons de plus que la fonction s reprend la même valeur toutes les fois que le point Z, se déplaçant sur la circonférence AP, vient à repasser par un même point quelconque P de cette ligne : car les valeurs correspondantes de l'angle u ne peuvent différer que de multiples de 2π, et lorsque u varie de 2π, l'exponentielle E^{iu} ne change pas. Considérons maintenant un point quelconque M de l'espace G, et soit P le point où la circonférence de rayon 1 coupe la droite OM du même côté du centre que le point M : quel que soit, dans ce même espace G, le chemin par lequel le point Z va de A en M, on pourra toujours, sans changer la valeur finale de s, remplacer le chemin dont il s'agit par un autre chemin dans lequel le point Z, après avoir décrit l'arc de cercle AP, effectue un certain nombre de révolutions complètes sur la circonférence AP et trace enfin la droite PM [*]. Or, quel

---

[*] Cette proposition résulte des principes que j'ai établis dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, t. XV, p. 370). Bien que dans ce Mémoire j'aie eu plus spécialement en vue les équations algébriques, les principes dont il s'agit s'appliquent également aux équations transcendantes du genre de l'équation (1).

que soit le nombre des révolutions effectuées, la valeur de s sera toujours la même au moment où le point Z partira de la position P pour décrire la droite PM. La fonction s obtiendra donc toujours la même valeur quand le point Z arrivera en M.

Il suit de là et d'un théorème dû à M. Cauchy et complété par M. Laurent [*] que pour toutes les valeurs de z qui répondent à l'espace G, ou dont le module est compris entre z_1 et z_2, on pourra exprimer par une série convergente ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives de z, non-seulement la fonction s, mais encore toute fonction S de s qui reste finie et continue dans tout l'espace G et qui reprend toujours la même valeur en chaque point de cet espace. Telle est, par exemple, une fonction entière des coordonnées X, Y, Z; car ces coordonnées sont des fonctions rationnelles de s et ne deviennent infinies que pour s nulle ou infinie : telle est encore la fonction

$$r^{\pm p} = \left\{ a\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]\right\}^{\pm p},$$

p désignant un nombre entier : car r ne s'annule que pour les valeurs $s = s_1$, $s = s_2$ qui répondent à $z = z_1$, $z = z_2$ et par conséquent ne se réduit pas à zéro dans l'intérieur de l'espace G. Une puissance fractionnaire $r^{\pm\frac{p}{q}}$ du rayon vecteur remplirait également les conditions imposées à la fonction S. Il suffirait, pour le prouver, de démontrer que $r^{\pm\frac{p}{q}}$, une fois définie par sa valeur initiale, ne peut acquérir qu'une seule valeur en chaque point de l'espace G; c'est ce qu'on établira aisément en montrant d'abord qu'une révolution complète sur le cercle de rayon 1 n'altère pas cette fonction. Ajoutons enfin qu'on pourrait prendre encore pour s le produit d'une puissance du rayon vecteur par un polynôme entier en X, Y, Z, ce qui est le type de la plupart des fonctions qu'on peut avoir à développer dans la théorie du mouvement elliptique d'une planète.

---

[*] *Voir* divers Mémoires de M. Cauchy ou bien la *Théorie des fonctions doublement périodiques*, par MM. Briot et Bouquet, p. 31.

Pour calculer effectivement les coefficients des diverses puissances de z dans le développement de la fonction S, nous observerons qu'en vertu du théorème déjà cité on a

$$2i\pi S = \int S z^{-1}\,dz + z\int S z^{-2}\,dz + z^{2}\int S z^{-3}\,dz + \ldots$$
$$+ z^{-1}\int S\,dz + z^{-2}\int S z\,dz + z^{-3}\int S z^{2}\,dz + \ldots;$$

les intégrales définies du second membre étant prises tout le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon plus grand que z_1 et plus petit que z_2, mais d'ailleurs arbitraire. Nous ferons le rayon de ce cercle égal à 1, de sorte qu'on ait $z = E^{i\zeta}$; il en résultera $s = E^{iu}$, et pendant que le point Z décrira le cercle dont il s'agit, le point qui répond à la valeur de s fera aussi une révolution complète sur le même cercle. Si donc dans les intégrales définies de la formule précédente on remplace z par sa valeur en s tirée de l'équation (1), les intégrations devront encore se faire, par rapport à la nouvelle variable s, le long d'un cercle de rayon 1. On trouvera ainsi pour le coefficient de z^m dans le développement de $2i\pi S$ l'expression

$$\int SE^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]s^{-m}\cdot\frac{ds}{s}.$$

La quantité $E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]$ se développe aisément suivant les puissances entières de s; concevons qu'on ait développé de la même manière la fonction S, ce qui sera facile dans les cas cités tout à l'heure comme exemple, et nommons P_m le coefficient de s^m dans le produit

$$SE^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]:$$

si l'on observe que l'intégrale définie $\int s^p\cdot\frac{ds}{s}$, prise le long d'un cercle qui renferme l'origine, se réduit à $2i\pi$ ou à zéro, suivant que l'entier p est nul ou ne l'est pas, on verra que le coefficient de z^m dans le dévelop-

nement de $2i\pi S$ se réduit à $2i\pi P_m$. On a donc

$$S = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + P_3 z^3 + \dots$$
$$+ P_{-1} z^{-1} + P_{-2} z^{-2} + P_{-3} z^{-3} + \dots$$

En d'autres termes : *Le nombre entier m étant positif ou négatif, le coefficient de z^m dans le développement de* S *suivant les puissances de z est égal à celui de s^m dans le développement du produit*

$$SE^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]$$

suivant les puissances de s.

Cette proposition a été énoncée par M. Cauchy dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 88; mais l'illustre géomètre ne paraît pas s'être préoccupé des conditions de convergence de la série, lorsque le module de z est différent de l'unité.

On peut, comme l'a encore remarqué M. Cauchy, donner une autre forme à ce coefficient. On a en effet, en intégrant par partie et considérant d'abord les intégrales indéfinies,

$$\int Sz^{-m-1}dz = -\frac{Sz^{-m}}{m} + \frac{1}{m}\int z^{-m}\frac{dS}{ds}ds;$$

prenant ensuite les intégrales le long du cercle de rayon 1 et supposant m différent de zéro, on aura

$$\int Sz^{-m-1}dz = \frac{1}{m}\int z^{-m}\frac{dS}{ds}ds = \frac{1}{m}\int \frac{dS}{ds}E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-m-1}ds.$$

On conclut de là que *le coefficient de z^m dans le développement de* S *suivant les puissances de z est égal à celui de s^{m-1} dans le développement du produit*

$$\frac{1}{m}\frac{dS}{ds}E^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}$$

suivant les puissances de s. Mais cette seconde expression ne s'applique pas au cas de $m = 0$.

Comme première application, posons $S = s$, ce qui nous fera retrouver les développements connus de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur. D'abord le terme indépendant de z dans le développement de s suivant les puissances de z sera le terme indépendant de s dans le produit

$$s\left[1 - \frac{c}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right].$$

Ce terme se réduit donc à $-\frac{c}{2}$. Quant au coefficient de z^m, on voit, en employant la seconde expression, qu'il est égal au coefficient de s^{m-1} dans la quantité

$$\frac{1}{m} e^{-m\frac{c}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{m\frac{c}{2}}{1}\left(s - \frac{1}{s}\right) + \frac{m^2\left(\frac{c}{2}\right)^2}{1.2}\left(s - \frac{1}{s}\right)^2 - \ldots\right].$$

Soit d'abord $m > 0$; on trouvera pour ce coefficient la valeur

$$\begin{aligned} Q_m = \frac{1}{m}\Bigg[& \frac{m^{m-1}\left(\frac{c}{2}\right)^m}{1.2\ldots(m-1)} - \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots \\ & + (-1)^p \frac{(m+2p-1)(m+2p-2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2p}}{1.2\ldots(m+2p-1)} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}$$

Soit ensuite $m < 0$; mettant le signe de m en évidence et désignant par R_m le coefficient de z^{-m}, on aura de la même manière

$$\begin{aligned} R_m = -\frac{1}{m}\Bigg[& \frac{m^{m+1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2}}{1.2\ldots(m+1)} - \frac{m+3}{1}\cdot\frac{m^{m+3}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+4}}{1.2\ldots(m+3)} + \ldots \\ & + (-1)^p \frac{(m+2p+1)(m+2p)\ldots(m+p+2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2p+1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2p+2}}{1.2\ldots(m+2p+1)} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}$$

Le développement de s suivant les puissances de z sera donc

$$\begin{aligned} s = -\frac{c}{2} & + Q_1 z + Q_2 z^2 + Q_3 z^3 + \ldots \\ & + R_1 z^{-1} + R_2 z^{-2} + R_3 z^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

On a déjà remarqué ci-dessus que s se change en $\frac{1}{s}$ quand on change z en $\frac{1}{z}$; on a donc aussi

$$\frac{1}{s} = -\frac{c}{2} + R_1 z + R_2 z^2 + R_3 z^3 + \ldots + Q_1 z^{-1} + Q_2 z^{-2} + Q_3 z^{-3} + \ldots$$

Il suit de là

$$\frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) = -\frac{c}{2} + (Q_1 + R_1)\cdot\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + (Q_2 + R_2)\cdot\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \ldots,$$

$$\frac{1}{2i}\left(s - \frac{1}{s}\right) = (Q_1 - R_1)\cdot\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + (Q_2 - R_2)\cdot\frac{1}{2i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \ldots$$

Faisons maintenant $z = E^{i\zeta}$, $s = E^{iu}$ et les deux équations précédentes deviendront

$$\cos u = -\frac{c}{2} + (Q_1 + R_1)\cos\zeta + (Q_2 + R_2)\cos 2\zeta + \ldots$$

$$\sin u = (Q_1 - R_1)\sin\zeta + (Q_2 - R_2)\sin 2\zeta + \ldots$$

ou bien

$$\cos u = -\frac{c}{2} + K_1\cos\zeta + K_2\cos 2\zeta + \ldots,$$

$$\sin u = L_1 \sin\zeta + L_2 \sin 2\zeta + \ldots$$

en posant

$$K_m = \frac{1}{m}\left[\frac{m^{m-1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} - \frac{m+2}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots + (-1)^p\frac{(m+2p)(m+2p-1)\ldots(m+p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2p-1}}{1.2\ldots(m+2p-1)} + \ldots\right],$$

$$L_m = \frac{1}{m}\left[\frac{m^{m-1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m^{m+1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots + (-1)^p\frac{m}{p}\cdot\frac{(m+2p-1)(m+2p-2)\ldots(m+p+1)}{1.2\ldots(p-1)}\cdot\frac{m^{m+2p-1}\left(\frac{c}{2}\right)^{m+2p-1}}{1.2\ldots(m+2p-1)} + \ldots\right].$$

On aura par suite

$$u = \zeta + e\sin u = \zeta + L_1 e \sin\zeta + L_2 e \sin 2\zeta + \ldots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u = 1 + \frac{e^2}{2} - K_1 e \cos\zeta - K_2 e \cos 2\zeta - \ldots$$

Il suit de notre analyse que ces divers développements subsistent non-seulement pour les valeurs de z dont le module est 1, ou, ce qui est la même chose, pour les valeurs réelles de ζ, mais aussi pour toutes les valeurs de z dont le module est compris entre z_1 et z_2, c'est-à-dire pour toutes les valeurs imaginaires de ζ de la forme $a + ib$ dans lesquelles la valeur numérique de b est inférieure à la limite

$$\log\cot\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi.$$

Seulement alors l'angle u n'est plus réel et il faut le regarder comme déterminé par les équations

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right), \quad \sin u = \frac{1}{2i}\left(s - \frac{1}{s}\right),$$

s étant la fonction de z définie ci-dessus.

Comme seconde application, nous ferons encore

$$S = \frac{a^n}{r^n} = \left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n},$$

n désignant un nombre entier positif. La fonction S ne changeant pas quand on change s en $\frac{1}{s}$ et par suite z en $\frac{1}{z}$, on aura ici $P_{-m} = P_m$ et la valeur commune de ces deux coefficients sera égale au coefficient de s^m dans la quantité

$$E^{\frac{me}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)}\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n+1}.$$

Or on a

$$\left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]^{-n+1} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\left(\frac{e}{2}\right)^p\left(s + \frac{1}{s}\right)^p$$

et

$$\mathrm{E}^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{m^q\left(\frac{e}{2}\right)^q}{1.2\ldots q}\left(s-\frac{1}{s}\right)^q;$$

il suit de là que P_m est le coefficient de s^m dans l'expression

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^q}{1.2\ldots q}\left(\frac{e}{2}\right)^{p+q}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^q.$$

Le produit $\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^q$ ne peut contenir s^m que si $p+q$ est au moins égal à m; il faut de plus que $p+q-m$ soit un nombre pair. Posons

$$p+q=m+2l,$$

l étant entier et positif; pour une valeur donnée de l, p pourra prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m+2l$, q recevant les valeurs correspondantes $m+2l$, $m+2l-1$, $m+2l-2, \ldots, 0$. Parmi les parties de la somme précédente qui pourront nous fournir des termes en s^m, se trouvera donc celle-ci

$$\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2l-p}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}}{1.2\ldots(m+2l-p)}\cdot\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s-\frac{1}{s}\right)^{m+2l-p}.$$

Pour avoir le coefficient de s^m dans cette partie, il suffira de développer $\left(s+\frac{1}{s}\right)^p$ et $\left(s-\frac{1}{s}\right)^{m+2l-p}$ par la formule du binôme; on trouvera ainsi pour ce coefficient

$$\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{m^{m+2l-p}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l}-\dfrac{m+2l-p}{1}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)}+\ldots\\ +(-1)^h\dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Il faudra ensuite ajouter toutes les valeurs que prend cette expression

pour $p = 0, 1, 2, \ldots, m + 2l$, valeurs dans lesquelles $\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}$ sera facteur commun. Enfin pour avoir P_m, on devra ajouter toutes les valeurs que prend la somme ainsi obtenue quand on y met pour l tous les nombres entiers de zéro à l'infini. Il viendra ainsi

$$P_m = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l} \sum_{p=0}^{p=m+2l} \frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{m^{m+2l-p}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l} - \dfrac{m+2l-p}{1} \cdot \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)} + \ldots \\ + (-1)^h \dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h} \cdot \dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Cette formule donne P_m sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de e. Si l'on y fait en particulier $m = 0$, on trouvera

$$P_0 = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(n-1)n\ldots(n+2l-2)}{(1.2\ldots l)^2} \left(\frac{e}{2}\right)^{2l}.$$

L'équation

$$\frac{a^n}{r^n} = P_0 + P_1(z + z^{-1}) + P_2(z^2 + z^{-2}) + \ldots$$

peut s'écrire encore

$$\frac{a^n}{r^n} = P_0 + 2P_1 \cos\zeta + 2P_2 \cos 2\zeta + \ldots.$$

Désignons par $\mathfrak{P}_m$ ce que devient P_m, quand on donne à n la valeur particulière $n = 2$; nous aurons

$$\frac{a^2}{r^2} = \mathfrak{P}_0 + 2\mathfrak{P}_1 \cos\zeta + 2\mathfrak{P}_2 \cos 2\zeta + \ldots..$$

La valeur de $\mathfrak{P}_m$ se déduira de celle de P_m en y remplaçant le facteur $\frac{(n-1)n\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots p}$ par l'unité, et l'on aura en particulier

$$\mathfrak{P}_0 = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{1.3\ldots(2l-1)}{2.4\ldots(2l)} e^{2l} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Mais en désignant par V l'anomalie vraie, on a l'équation connue

$$r^2\,dV = a^2\sqrt{1-e^2}\,d\zeta,$$

d'où

$$dV = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,d\zeta;$$

remplaçons $\frac{a}{r^2}$ par son développement, et il viendra

$$dV = \left[1 + 2\sqrt{1-e^2}\,(\mathfrak{P}_1\cos\zeta + \mathfrak{P}_2\cos 2\zeta + \ldots)\right]d\zeta,$$

d'où, en intégrant,

$$V - \zeta = 2\sqrt{1-e^2}\left(\mathfrak{P}_1\sin\zeta + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_2\sin 2\zeta + \frac{1}{3}\mathfrak{P}_3\sin 3\zeta + \ldots\right).$$

Si donc on pose

$$C_m = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{m}\,\mathfrak{P}_m,$$

on aura, pour l'équation du centre $V-\zeta$, l'expression

$$V - \zeta = C_1\sin\zeta + C_2\sin 2\zeta + C_3\sin 3\zeta + \ldots,$$

où le coefficient du terme général sera donné par la formule [*]

$$C_m = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{m}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l}\sum_{p=0}^{p=m+2l}\frac{m^{m+2l-p}}{1.2\ldots(m+2l-p)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots l}\\[2ex] -\dfrac{m+2l-p}{1}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{1.2\ldots(l-1)}+\ldots\\[2ex] +(-1)^h\dfrac{(m+2l-p)(m+2l-p-1)\ldots(m+2l-p-h+1)}{1.2\ldots h}\cdot\dfrac{p(p-1)\ldots(p-l+h+1)}{1.2\ldots(l-h)}\\[2ex] +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

[*] Cette expression de l'équation du centre ne diffère de celle que M. Bourget a donnée, il y a plusieurs années (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVIII, p. 807), qu'en ce que le radical $\sqrt{1-e^2}$ n'y est pas développé suivant les puissances de e. Je n'ai eu connaissance du travail de M. Bourget qu'après avoir écrit ce qui précède.

DEUXIÈME PARTIE.

Le développement de la fonction perturbatrice en série a été l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres. M. Cauchy, qui s'en est occupé à diverses reprises, a fait connaître plusieurs méthodes par lesquelles on peut former le coefficient du terme correspondant à un argument donné, et l'une de ces méthodes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 84) est fondée sur le théorème énoncé à la page 77 du présent Mémoire. Toutefois l'illustre géomètre n'a pas donné, sous forme explicite, le coefficient du terme général. Je me propose, dans ce qui va suivre, de montrer qu'on peut en obtenir aisément l'expression : les formules auxquelles nous allons parvenir ne contiendront d'ailleurs aucune transcendante particulière et permettront d'apprécier immédiatement soit le degré de grandeur de chaque partie du coefficient, soit la manière dont elle dépend des éléments elliptiques des deux planètes.

Les lettres a, e, ψ, ζ, z, z_1, z_2, s, r, ξ, η, X, Y, Z ayant toujours la même signification que ci-dessus, désignons par a', e', ψ', ζ', z', z'_1, z'_2, s', r', ξ', η', X', Y', Z' ce que deviennent ces quantités pour une seconde planète : nommons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les masses de ces deux astres, Δ leur distance mutuelle, f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. La fonction perturbatrice qu'il y a lieu de considérer, quand on veut déterminer les perturbations produites dans le mouvement de $\mathfrak{M}$ par l'attraction de $\mathfrak{M}'$, est la suivante :

$$R = f\mathfrak{M}'\left(\frac{XX' + YY' + ZZ'}{rr'} - \frac{1}{\Delta}\right).$$

On a besoin, pour le calcul des perturbations, d'exprimer cette fonction par une somme de sinus et de cosinus d'arcs de la forme $m\zeta + m'\zeta'$, m et m' étant des entiers positifs ou négatifs. En vertu de la formule

$$z^m z'^{m'} = \cos(m\zeta + m'\zeta') + i\sin(m\zeta + m'\zeta'),$$

cela revient à développer R suivant les puissances entières, positives et négatives de z et de z'.

Nous savons déjà que la partie $f\mathfrak{M}'\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$ est développable sous cette forme à la condition que le module de z soit renfermé entre les limites z_1, z_2, et celui de z' entre les limites z'_1, z'_2, ce qui comprend le cas où ces modules seraient l'un et l'autre égaux à l'unité. D'un autre côté, lorsqu'on suppose les modules de z et de z' égaux à 1, la quantité

$$\Delta^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2$$

devient une quantité réelle et positive exprimant le carré de la distance de deux points réels pris sur les deux orbites. Si donc on fait mouvoir les points Z et Z' correspondants à z et à z' sur le cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre, Δ^2 restera toujours positive et ne s'annulera pas, les deux orbites étant supposées n'avoir aucun point commun ; la quantité Δ, considérée comme une fonction continue de z et de z', reste donc réelle, ne change pas de signe, et par conséquent reprend toujours la même valeur, lorsque les points Z et Z' ont accompli des révolutions en nombre quelconque sur le cercle qu'ils décrivent. De là il suit que $-\dfrac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ est développable suivant les puissances de z et de z', lorsque les modules de ces variables sont compris l'un et l'autre entre des limites suffisamment voisines de l'unité, et qui pour chaque module sont l'une inférieure et l'autre supérieure à 1 [*]; la seule condition nécessaire pour que ce développement existe est que les deux orbites ne se coupent pas.

La fonction perturbatrice R étant développable suivant les puissances entières de z et de z', lorsque les modules de ces variables sont

[*] On peut assigner aisement des limites precises de ces modules dans le cas particulier où l'on suppose les deux excentricités nulles ainsi que l'inclinaison mutuelle des orbites. Soit alors $\dfrac{a}{a'} = \alpha$; soit de plus β un nombre compris entre α et 1. Si l'on assujettit le module de z à rester compris entre les limites β et $\dfrac{1}{\beta}$, celui de z' devra rester compris entre $\dfrac{\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

suffisamment voisins de 1, nous nous proposerons d'en effectuer le développement, en supposant les deux modules égaux précisément à l'unité; ce qui est le cas de la Mécanique céleste. Nous admettrons d'abord que l'on a $a < a'$, ou que la planète perturbatrice $\mathfrak{M}'$ est la plus éloignée du Soleil; nous verrons ensuite comment les formules doivent être modifiées lorsque le contraire a lieu.

Conformément aux principes établis dans la première Partie, nous commencerons par exprimer R en fonction des variables auxiliaires s et s'.

Nous avons

$$\Delta^2 = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2 = r^2 + r'^2 - 2(XX' + YY' + ZZ');$$

remplaçons X, Y, Z, X', Y', Z' par leurs valeurs

$$X = A\xi + A_1\eta,\quad Y = B\xi + B_1\eta,\quad Z = C\xi + C_1\eta,$$
$$X' = A'\xi' + A'_1\eta',\quad Y' = B'\xi' + B'_1\eta',\quad Z' = C'\xi' + C'_1\eta',$$

et ayons égard aux relations

$$AA' + BB' + CC' = \cos(\xi, \xi'),\qquad A_1A'_1 + B_1B'_1 + C_1C'_1 = \cos(\eta, \eta'),$$
$$A'A_1 + B'B_1 + C'C_1 = \cos(\xi', \eta),\qquad AA'_1 + BB'_1 + CC'_1 = \cos(\xi, \eta');$$

nous trouverons

$$XX' + YY' + ZZ' = \xi\xi'\cos(\xi, \xi') + \eta\eta'\cos(\eta, \eta') + \xi'\eta\cos(\xi', \eta) + \xi\eta'\cos(\xi, \eta').$$

Représentons par I l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et par τ, τ' les angles que les directions $O\xi$, $O\xi'$ des périhélies font avec l'intersection des plans des orbites, nous aurons, par la trigonométrie sphérique,

$$\cos(\xi, \xi') = \cos\tau\cos\tau' + \sin\tau\sin\tau'\cos I,$$
$$\cos(\eta, \eta') = \sin\tau\sin\tau' + \cos\tau\cos\tau'\cos I,$$
$$\cos(\xi', \eta) = -\sin\tau\cos\tau' + \cos\tau\sin\tau'\cos I,$$
$$\cos(\xi, \eta') = -\cos\tau\sin\tau' + \sin\tau\cos\tau'\cos I.$$

Faisons

$$\tau - \tau' = \sigma ;$$

ces formules pourront s'écrire

$$\cos(\xi, \xi') = \cos\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\tau\sin\tau',$$

$$\cos(\eta, \eta') = \cos\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\tau\cos\tau',$$

$$\cos(\xi', \eta) = -\sin\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\tau\sin\tau',$$

$$\cos(\xi, \eta') = \sin\sigma - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\tau\cos\tau'.$$

Il en résultera

$$XX' + YY' + ZZ' = (\xi\xi' + \eta\eta')\cos\sigma - (\xi'\eta - \xi\eta')\sin\sigma$$
$$- 2\sin^2\frac{I}{2}\cdot(\xi\sin\tau + \eta\cos\tau)(\xi'\sin\tau' + \eta'\cos\tau').$$

Mais on a, V et V' désignant les anomalies vraies,

$$\xi = r\cos V, \quad \eta = r\sin V, \quad \xi' = r'\cos V', \quad \eta' = r'\sin V' ;$$

il s'ensuit

$$XX' + YY' + ZZ' = rr'\cos(V - V' + \sigma)$$
$$- 2\sin^2\frac{I}{2}\cdot r\sin(V + \tau) . r'\sin(V' + \tau'),$$

et par conséquent

$$\Delta^2 = P + Q,$$

en faisant

$$(4)\qquad \begin{cases} P = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(V - V' + \sigma), \\ Q = 4\sin^2\frac{I}{2}\cdot r\sin(V + \tau) . r'\sin(V' + \tau'). \end{cases}$$

La quantité P est le carré de la distance de deux points pris sur les deux orbites, en supposant que le plan de l'une ait été rabattu sur le plan de l'autre par une rotation autour de l'intersection mutuelle. Nous admettrons que même après ce rabattement les deux orbites

n'ont aucun point commun; et nous appellerons δ ce que devient alors leur plus courte distance. Par exemple, si les deux orbites étaient circulaires, δ serait la différence de leurs rayons. Dans tous les cas, P ne pourra devenir inférieur à δ^2.

Dans la quantité Q, le facteur $r \sin(\mathrm{V} + \tau)$ exprime la distance d'un point de l'orbite de $\mathfrak{M}$ à l'intersection mutuelle, distance qui a pour maximum

$$a\left(\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau} + e\sqrt{1 - \cos^2\tau}\right):$$

pareillement le maximum du facteur $r' \sin(\mathrm{V}' + \tau')$ est

$$a'\left(\sqrt{1 - e'^2\cos^2\tau'} + e'\sqrt{1 - \cos^2\tau'}\right),$$

et par suite le maximum de Q est

$$4aa'\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$$
$$\times\left(\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau} + e\sqrt{1 - \cos^2\tau}\right)\left(\sqrt{1 - e'^2\cos^2\tau'} + e'\sqrt{1 - \cos^2\tau'}\right).$$

La quantité $\frac{1}{\Delta} = (\mathrm{P} + \mathrm{Q})^{-\frac{1}{2}}$ sera donc développable en série suivant les puissances croissantes de Q ou, si l'on veut, de $\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$, quand on aura

$$4aa'\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}$$
$$\times\left(\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau} + e\sqrt{1 - \cos^2\tau}\right)\left(\sqrt{1 - e'^2\cos^2\tau'} + e'\sqrt{1 - \cos^2\tau'}\right) < \delta^2.$$

Nous supposerons l'inclinaison mutuelle I assez petite pour que cette inégalité soit vérifiée [*]. Alors on aura

$$\frac{1}{\Delta} = \mathrm{P}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{P}^{-\frac{3}{2}}\mathrm{Q} + \frac{1.3}{2.4}\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{Q}^2 - \ldots.$$

---

[*] Dans le cas de deux orbites circulaires, $\sin\frac{\mathrm{I}}{2}$ devrait être moindre que $\frac{a' - a}{2\sqrt{aa'}}$.

ou bien

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} P^{-\frac{2k+1}{2}} Q^k.$$

Introduisons à présent les variables s et s' : la premiere des équations (4) nous donnera d'abord

$$\begin{aligned} P &= \left[r' - r E^{i(V-V'+\sigma)}\right]\left[r' - r E^{-i(V-V'+\sigma)}\right] \\ &= r'^2 \left(1 - \frac{r E^{iV}}{r' E^{iV'}} E^{i\sigma}\right)\left(1 - \frac{r E^{-iV}}{r' E^{-iV'}} E^{-i\sigma}\right). \end{aligned}$$

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\tang \frac{\psi}{2} = \omega, \qquad \tang \frac{\psi'}{2} = \omega',$$

$$\cos^2 \frac{\psi}{2} = \varepsilon, \qquad \cos^2 \frac{\psi'}{2} = \varepsilon', \qquad \frac{a}{a'} = \alpha$$

de sorte que ω, ω' seront généralement de petites fractions et ε, ε' des nombres voisins de 1 : on aura d'ailleurs $\alpha < 1$, d'après l'hypothèse déjà faite que des deux planètes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ la seconde est la plus éloignée du Soleil. Il viendra

$$\begin{aligned} r E^{iV} = \xi + i\eta &= \frac{a}{2}\left[s + \frac{1}{s} - 2e + \sqrt{1-e^2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right] \\ &= as \cos^2 \frac{\psi}{2}\left(1 - \frac{1}{s} \tang \frac{\psi}{2}\right)^2 = a\varepsilon s\left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^2, \end{aligned}$$

et de même

$$r' E^{iV'} = a'\varepsilon' s'\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^2.$$

il suit de là

$$\frac{r E^{iV}}{r' E^{iV'}} = \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{s}{s'} \left(\frac{1 - \frac{\omega}{s}}{1 - \frac{\omega'}{s'}}\right)^2.$$

On trouvera pareillement

$$rE^{-iV} = \frac{a\varepsilon}{s}(1-\omega s)^2,$$

$$r'E^{-iV'} = \frac{a'\varepsilon'}{s'}(1-\omega' s')^2,$$

$$\frac{rE^{-iV}}{r'E^{-iV'}} = \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2,$$

et aussi

$$r'^2 = r'E^{iV'}.r'E^{-iV'} = a'^2\varepsilon'^2\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^2(1-\omega' s')^2.$$

Il en résulte

$$P = a'^2\varepsilon'^2\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^2(1-\omega' s')^2\left[1-\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2E^{i\varphi}\right]$$

$$\times\left[1-\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2E^{-i\varphi}\right],$$

$$P^{-\frac{2h+1}{2}} = a'^{-(2h+1)}\varepsilon'^{-(2h+1)}\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^{-(2h+1)}(1-\omega' s')^{-(2h+1)}\left[1-\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2E^{i\varphi}\right]^{-\frac{2h+1}{2}}$$

$$\times\left[1-\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2E^{-i\varphi}\right]^{-\frac{2h+1}{2}}.$$

Les modules de s et de s' étant égaux à l'unité, ceux des deux quantités

$$\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\frac{\omega}{s}}{1-\frac{\omega'}{s'}}\right)^2E^{i\varphi},\qquad \alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s'}{s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2E^{-i\varphi}$$

sont l'un et l'autre inférieurs à la limite

$$\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\left(\frac{1+\omega}{1-\omega'}\right)^2 = \frac{a}{a'}\cdot\frac{1+e}{1-e'}.$$

Si donc on a

$$\frac{a}{a'}\cdot\frac{1+e}{1-e'}<1,$$

et il en sera ordinairement ainsi, puisqu'on a déjà supposé $a<a'$, on pourra développer les facteurs

$$\left[1-\alpha\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{s}{s'}\left(\frac{1-\dfrac{\omega}{s}}{1-\dfrac{\omega'}{s'}}\right)^2 E^{i\sigma}\right]^{-\frac{2k+1}{2}},\quad \left[1-\alpha\frac{\varepsilon s'}{\varepsilon' s}\left(\frac{1-\omega s}{1-\omega' s'}\right)^2 E^{-i\sigma}\right]^{-\frac{2k+1}{2}}$$

suivant les puissances de α. On trouvera de cette manière

$$(5)\quad \frac{1}{\Delta}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty}\left\{\begin{array}{l}(-1)^k\cdot\dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\cdot\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\\ \times\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)}\\ \times a'^{-(2k+1)}\,\varepsilon^{p+q}\,\varepsilon'^{-(2k+p+q+1)}\,\alpha^{p+q}\,s^{p-q}\,s'^{-p+q}\\ \times\left(1-\dfrac{\omega}{s}\right)^{2p}(1-\omega s)^{2q}\left(1-\dfrac{\omega'}{s'}\right)^{-(2k+2p+1)}\\ \times(1-\omega' s')^{-(2k+2q+1)}\,E^{i(p-q)\sigma}.Q^k\end{array}\right\}$$

Avant d'aller plus loin, observons que si dans le second membre de l'équation précédente on se borne à attribuer aux entiers k, p, q les trois systèmes de valeurs

(6) $k=0,\quad p=1,\quad q=0,$

(7) $k=0,\quad p=0,\quad q=1,$

(8) $k=1,\quad p=0,\quad q=0,$

la somme des trois parties de $\frac{1}{\Delta}$ qu'on obtient ainsi est précisément égale à $\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$.

En effet, la valeur trouvée plus haut de $XX'+YY'+ZZ'$ peut s'écrire

$$XX'+YY'+ZZ'=\frac{1}{2}rE^{iv}\cdot r'E^{-iv'}\cdot E^{i\sigma}+\frac{1}{2}rE^{-iv}\cdot r'E^{iv'}\cdot E^{-i\sigma}-\frac{1}{2}Q:$$

mais on a

$$r'^3 = a'^3 \varepsilon'^3 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^3 (1 - \omega' s')^3.$$

Divisons ces deux équations membre à membre, après avoir remplacé dans la première rE^{iV}, rE^{-iV}, $r'E^{iV'}$, $r'E^{-iV'}$ par leurs valeurs données ci-dessus : il viendra

$$\frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} a'^{-1} \varepsilon\varepsilon'^{-2} \alpha s s'^{-1} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^3 (1 - \omega' s')^{-1} E^{i\tau} \\ + \frac{1}{2} a'^{-1} \varepsilon\varepsilon'^{-2} \alpha s^{-1} s' (1 - \omega s)^2 \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-1} (1 - \omega' s')^{-3} E^{-i\tau} \\ - \frac{1}{2} a'^{-3} \varepsilon'^{-3} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-3} (1 - \omega' s')^{-3} Q \end{array} \right\}.$$

Or les trois parties dont ce second membre se compose sont précisément les trois valeurs que prend le terme général de $\frac{1}{\Delta}$, quand on y met successivement pour k, p, q les trois systèmes de valeurs (6), (7) et (8).

Si donc nous convenons d'exclure de la somme triple $\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} \sum\limits_{p=0}^{p=\infty} \sum\limits_{q=0}^{q=\infty}$ les parties correspondantes à ces trois systèmes de valeurs de k, p, q, nous pourrons regarder le second membre de la formule (5) comme exprimant la valeur, non plus de $\frac{1}{\Delta}$, mais de la différence

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} = \frac{R}{-f\mathfrak{M}'}.$$

Nous avons encore à exprimer la quantité Q en fonction de s et de s'. On a d'abord

$$r \sin(V + \tau) = \xi \sin\tau + \eta \cos\tau = \frac{a}{2}\left[\left(s + \frac{1}{s} - 2e\right)\sin\tau - i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[(\sin\tau - i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau)s - 2e\sin\tau + (\sin\tau + i\sqrt{1 - e^2}\cos\tau)\frac{1}{s}\right];$$

mais on peut toujours déterminer un angle φ qui satisfasse aux deux équations

$$\sin\varphi = \frac{\sin\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}},$$

desquelles on déduit

$$\sin\tau - i\sqrt{1-e^2}\cos\tau = -i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,\mathrm{E}^{i\varphi},$$

$$\sin\tau + i\sqrt{1-e^2}\cos\tau = i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,\mathrm{E}^{-i\varphi},$$

$$2\sin\tau = i\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,(\mathrm{E}^{-i\varphi} - \mathrm{E}^{i\varphi});$$

il en résulte

$$r\sin(\mathrm{V}+\tau) = \frac{1}{2}ia\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\left[\frac{1}{s}(1-es)\,\mathrm{E}^{-i\varphi} - s\left(1-\frac{e}{s}\right)\mathrm{E}^{i\varphi}\right].$$

On aura de même

$$r'\sin(\mathrm{V}+\tau') = \frac{1}{2}ia'\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}\left[\frac{1}{s'}(1-e's')\,\mathrm{E}^{-i\varphi'} - s'\left(1-\frac{e'}{s'}\right)\mathrm{E}^{i\varphi'}\right],$$

l'angle φ' étant défini par les deux équations

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\tau'}{\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}}, \qquad \cos\varphi' = \frac{\sqrt{1-e'^2}\cos\tau'}{\sqrt{1-e'^2\cos^2\tau'}}.$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}\sqrt{(1-e^2\cos^2\tau)(1-e'^2\cos^2\tau')} = c,$$

on trouvera

$$\mathrm{Q} = -aa'c\left[\frac{1}{s}(1-es)\,\mathrm{E}^{-i\varphi} - s\left(1-\frac{e}{s}\right)\mathrm{E}^{i\varphi}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{s'}(1-e's')\,\mathrm{E}^{-i\varphi'} - s'\left(1-\frac{e'}{s'}\right)\mathrm{E}^{i\varphi'}\right].$$

Élevons les deux membres à la puissance k, nous aurons

$$
\mathrm{Q}^k = a^k a'^k c^k \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} (-1)^{k+n+n'}
$$

$$
\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \cdot s^{2n-k} s'^{2n'-k} \\ \times \left(1-\dfrac{e}{s}\right)^n (1-es)^{k-n} \left(1-\dfrac{e'}{s'}\right)^{n'} (1-e's')^{k-n'} \mathrm{E}^{i[(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{array} \right\}.
$$

et si nous substituons cette valeur dans l'expression déjà obtenue de $\dfrac{\mathrm{R}}{-f\mathfrak{M}'}$, il nous viendra

$$
(9) \qquad \mathrm{R} = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} (-1)^{n+n'}
$$

$$
\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \\ \times \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \\ \times \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \varepsilon^{p+q} \varepsilon'^{\,2k+p+q+1} \alpha^{k+p+q+1} c^k s^{p-q+2n-k} s'^{-p+q+2n'-k} \\ \times \left(1-\dfrac{\omega}{s}\right)^{2p} (1-\omega s)^{2q} \left(1-\dfrac{\omega'}{s'}\right)^{-2k+2p+1} (1-\omega' s')^{-2k+2q+1} \\ \times \left(1-\dfrac{e}{s}\right)^n (1-es)^{k-n} \left(1-\dfrac{e'}{s'}\right)^{n'} (1-e's')^{k-n'} \mathrm{E}^{i[(p-q)\varpi+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{array} \right\},
$$

où l'on doit se souvenir de supprimer dans le second membre les parties correspondantes aux systèmes de valeurs (6), (7) et (8) des entiers k, p, q.

Pour passer maintenant cette expression de R en s et s' au développement de la même fonction suivant les puissances de z et de z', il suffit d'observer que, d'après les principes établis dans la première Partie, le coefficient $\mathrm{A}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans ce développement est égal au coefficient de $s^m s'^{m'}$ dans le produit de l'expression précédente de R

par la quantité

$$\Pi = \mathrm{E}^{\frac{me}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\left[1-\frac{e}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]\cdot \mathrm{E}^{\frac{m'e'}{2}\left(s'-\frac{1}{s'}\right)}\left[1-\frac{e'}{2}\left(s'+\frac{1}{s'}\right)\right]$$

$$= \left(1-\frac{\omega}{s}\right)(1-\omega s)\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)(1-\omega' s')\sum_{g=0}^{g=\infty}\sum_{g'=0}^{g'=\infty}\frac{m^g}{1.2\ldots g}\cdot\frac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'}$$

$$\times\, \varepsilon^{g+1}\varepsilon'^{g'+1}\omega^g\omega'^{g'}\left(s-\frac{1}{s}\right)^g\left(s'-\frac{1}{s'}\right)^{g'}.$$

Il ne reste plus qu'à développer les puissances de binômes qui figurent dans le produit ΠR, et l'on arrive ainsi à la proposition suivante :

Si l'on pose

$$(10)\quad C = -\frac{f\mathfrak{M}}{a}\times\left\{\begin{aligned}
&(-1)^{[illegible]}\,\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}\\
&\times\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\cdot\frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)}\\
&\times\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'}\\
&\times\frac{(2p+1)(2p)\ldots(2p-\lambda+2)}{1.2\ldots\lambda}\cdot\frac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu+2)}{1.2\ldots\mu}\\
&\times\frac{(2k+2p)(2k+2p+1)\ldots(2k+2p+\lambda'-1)}{1.2\ldots\lambda'}\\
&\times\frac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'}\\
&\times\frac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota}\cdot\frac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\varkappa+1)}{1.2\ldots\varkappa}\\
&\times\frac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'}\cdot\frac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\varkappa'+1)}{1.2\ldots\varkappa'}\\
&\times\frac{m^\nu}{1.2\ldots\nu\times1.2\ldots(g-\nu)}\cdot\frac{m'^{\nu'}}{1.2\ldots\nu'\times1.2\ldots(g'-\nu')}\\
&\times 2^{[illegible]}\,\varepsilon^{p+q+\iota+\varkappa-g+1}\,\varepsilon'^{[illegible]}\,\mathfrak{z}^{[illegible]}\\
&\times e^k\,\omega^{[illegible]}\,\omega'^{[illegible]}
\end{aligned}\right\},$$

$$(11)\quad z = (p-q)\sigma + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi',$$

le coefficient $A_{m,m'}$ *de* $z^m z'^{m'}$ *dans la valeur de* R *est égal à la somme*

des valeurs que prend le produit $CE^{i'}$, *quand on attribue aux entiers*

$$k,\ p,\ q,\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \iota,\ \varkappa,\ \iota',\ \varkappa',\ g,\ g',\ \nu,\ \nu'$$

toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les deux équations

$$(12)\quad \begin{cases} 2n - k + p - q - \lambda + \mu - \iota + \varkappa + g - 2\nu = m, \\ 2n' - k - p + q - \lambda' + \mu' - \iota' + \varkappa' + g' - 2\nu' = m', \end{cases}$$

et les inégalités

$$(13)\quad \begin{cases} n < k, \quad n' < k, \quad \lambda < 2p + 1, \quad \mu < 2q + 1, \quad \iota < n, \quad \varkappa < k - n, \\ \qquad \iota' < n', \quad \varkappa' < k - n', \quad \nu < g, \quad \nu' < g' \quad [*], \end{cases}$$

en excluant toutefois les combinaisons dans lesquelles on aurait, soit $k = 0$, $p = 1$, $q = 0$; *soit* $k = 0$, $p = 0$, $q = 1$; *soit encore* $k = 1$, $p = 0$, $q = 0$ [**].

Ce théorème donne directement l'expression analytique du coefficient d'un terme quelconque de la fonction perturbatrice, dans le cas, auquel nous nous sommes borné jusqu'à présent, d'une planète perturbatrice plus éloignée du Soleil que la planète troublée. Nous allons y ajouter quelques remarques propres à en faciliter l'application.

Supposons qu'ayant d'abord attribué aux entiers k, p, q, ..., de certaines valeurs, on remplace ensuite respectivement

$$p,\ q,\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \iota,\ \varkappa,\ \iota',\ \varkappa',\ \nu,\ \nu'$$

par les valeurs

$$q,\ p,\ k - n,\ k - n',\ \mu,\ \lambda,\ \mu',\ \lambda',\ \varkappa,\ \iota,\ \varkappa',\ \iota',\ g - \nu,\ g' - \nu',$$

en laissant d'ailleurs à k, g et g' leurs valeurs primitives. Le coefficient

---

[*] Le signe $<$ n'exclut pas l'égalité.

[**] J'ai donné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. L, p. 155, d'autres formules qu'on obtient par la décomposition de la quantité Q en facteurs du premier degré; mais elles sont moins commodes dans l'application. Je ferai observer à cette occasion qu'à la page citée des *Comptes rendus*, le signe — a été omis par erreur devant la valeur de C.

C ne changera pas; mais l'angle κ et les premiers membres des équations (12) changeront de signes sans changer de valeurs numériques. Il suit de là qu'au terme

$$\mathrm{CE}^{i\kappa} z^{m} z'^{m'} = \mathrm{CE}^{i(m\zeta + m'\zeta' + \kappa)}$$

de R, correspond toujours cet autre [*]

$$\mathrm{CE}^{-i\kappa} z^{-m} z'^{-m'} = \mathrm{CE}^{-i(m\zeta + m'\zeta' + \kappa)}$$

La somme de ces deux termes se réduit à la quantité réelle

$$2\mathrm{C}\cos(m\zeta + m'\zeta' + \kappa);$$

ainsi à l'aide des valeurs données ci-dessus de C et de κ, on obtient immédiatement l'expression de la fonction perturbatrice sous la forme d'une somme de termes proportionnels à des cosinus d'arcs tels que $m\zeta + m'\zeta' + \kappa$, c'est-à-dire sous la forme la mieux appropriée au calcul des perturbations.

On regarde ordinairement les excentricités et l'inclinaison mutuelle des orbites comme de petites quantités du premier ordre; alors ω et ω' sont aussi du premier ordre, et c est du second. L'ordre N du coefficient C est donc donné par la formule

$$\mathrm{N} = 2k + \lambda + \mu + \lambda' + \mu' + \iota + \varkappa + \iota' + \varkappa' + g + g'.$$

On conclut de là et des équations (12)

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{N} + (m + m') = 2[n + n' + \mu + \mu' + \varkappa + \varkappa' + (g - \nu) + (g' - \nu')],\\ &\mathrm{N} - (m + m') = 2[(k - n) + (k - n') + \lambda + \lambda' + \iota + \iota' + \nu + \nu'];\end{aligned}\right.$$

---

[*] Cette conclusion ne serait en défaut que si l'on avait à la fois

$$p = q,\quad n = n' = \frac{k}{2},\quad \lambda = \mu,\quad \lambda' = \mu',\quad \iota = \varkappa,\quad \iota' = \varkappa',\quad \nu = \frac{g}{2},\quad \nu' = \frac{g'}{2}:$$

dans ce cas les nouvelles valeurs de k, p, q, etc., ne différeraient pas des premières, et au lieu de deux termes correspondants on n'en aurait qu'un seul. On aurait alors $m = 0$, $m' = 0$, $\kappa = 0$, et le terme unique de R, répondant à ces valeurs de k, p, q, etc., se réduirait à la constante réelle C.

d'ailleurs, en vertu des inégalités (13), les différences $k-n$, $k-n'$, $g-\nu$, $g'-\nu'$ sont positives. On voit donc que si l'on désigne par h la valeur numérique de la somme $m+m'$, l'ordre N du coefficient C ne peut être inférieur à h, et que la différence $\mathrm{N}-h$ est nécessairement un nombre pair.

Pour appliquer les formules (10) et (11) au calcul de la partie de la fonction perturbatrice qui répond à un argument donné $m\zeta+m'\zeta'$, il faudra d'abord former le tableau des systèmes de valeurs de k, p, q, ..., qui, pour les valeurs données de m et de m', satisfont aux conditions (12) et (13). Le nombre de ces systèmes est illimité; mais comme l'ordre N augmente indéfiniment avec chacun des nombres k, λ, μ, λ', μ', ι, $\varkappa$, ι', $\varkappa'$, g, g', et que de plus l'exposant de α dans C croît lui-même indéfiniment avec chacun des nombres p et q, on voit que si l'on a fixé d'avance le degré de petitesse des termes qu'on regarde comme négligeables, on trouvera aisément des limites que les nombres k, p, q, λ, μ, λ', μ', ι, $\varkappa$, ι', $\varkappa'$, g, g' ne devront pas dépasser, et alors les autres entiers n, n', ν, ν', en vertu des inégalités (13), se trouveront eux-mêmes limités. Je pourrai, dans une autre occasion, à propos d'une application particulière, expliquer avec plus de détails la marche pratique qu'il convient de suivre pour former rapidement le tableau dont il s'agit.

Une fois ce tableau obtenu, le calcul numérique de C et de $\varkappa$ se fera très-aisément, surtout si l'on a construit à l'avance des tables donnant les multiples successifs des logarithmes de α, c, ω, ω', ε, ε', et aussi des tables contenant les logarithmes des quotients de factorielles et des expressions $\frac{m^g}{1.2\ldots\nu\times1.2\ldots(g-\nu)}$, $\frac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu'\times1.2\ldots(g'-\nu')}$, qui peuvent figurer dans C.

Ainsi qu'on l'a déjà dit, les termes qui répondent à des valeurs données de m et de m' sont d'un ordre au moins égal à la valeur numérique h de la somme $m+m'$, et si l'on se borne à ceux qui sont précisément de l'ordre h, les quantités négligées seront au moins de l'ordre $h+2$. Lorsqu'on pourra se contenter de cette approximation, et il en sera souvent ainsi, les formules précédentes se simplifieront beaucoup. En effet supposons, pour fixer les idées, la somme $m+m'$ positive; l'ordre N des termes conservés devant être égal à $m+m'$, il suit de la

seconde des équations (14), qu'on a

$$n = n' = k, \quad \lambda = \lambda' = \iota = \iota' = \nu = \nu' = 0,$$

et aussi, en vertu des inégalités (13),

$$\gamma = \gamma' = 0.$$

On arrive donc à la conclusion suivante : *Si l'on pose*

$$C = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a} \times \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\mu} \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \\ \times \dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \cdot \dfrac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu+2)}{1.2\ldots\mu} \\ \times \dfrac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'} \cdot \dfrac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'} \\ \times \varepsilon^{p+q+g+1} \varepsilon'^{-(2k+p+q-g')} \alpha^{k+p+q+1} c^k \omega^{\mu+g} \omega'^{\mu'+g'} \end{array} \right\},$$

$$z = (p-q)\sigma + k(\varphi + \varphi'),$$

la partie de $A_{m,m'}$ *qui est de l'ordre* $m + m'$, *s'obtiendra en faisant la somme des valeurs que prend l'expression* CE^{iz}, *quand on attribue aux entiers* $k, p, q, \mu, \mu', g, g'$, *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les équations*

$$k + p - q + \mu + g = m, \quad k - p + q + \mu' + g' = m',$$

et l'inégalité

$$\mu < 2q + 1,$$

mais en excluant toujours les combinaisons

$$1^{\circ}\ k=0,\ p=1,\ q=0; \quad 2^{\circ}\ k=0,\ p=0,\ q=1; \quad 3^{\circ}\ k=1,\ p=0,\ q=0.$$

Nous avons encore à indiquer les modifications qu'il faut faire subir à nos formules, lorsque la planète perturbatrice $\mathfrak{M}'$ est plus rapprochée du Soleil que la planète troublée $\mathfrak{M}$. On aura alors $a' < a$, et il conviendra dans ce cas de faire

$$\frac{a'}{a} = \alpha,$$

α étant moindre que 1. Les autres notations restant les mêmes, ainsi que la limite donnée plus haut de $\sin^2 \frac{I}{2}$, et l'inégalité $\frac{a'}{a} \cdot \frac{1+e'}{1-e} < 1$

étant supposée vérifiée, on trouvera pour $\frac{1}{\Delta}$ une expression qui peut se déduire de l'équation (5) en y remplaçant respectivement les lettres a', ε, ε', s, s', σ par a, ε', ε, s', s, $-\sigma$. Mais il n'arrivera plus que les termes de cette expression répondant aux systèmes de valeurs (6), (7) et (8) de k, p, q composent la quantité $\frac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$; il conviendra donc ici de développer séparément les deux parties

$$-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}, \quad f\mathfrak{M}'\frac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$$

de la fonction R. En nommant $\mathcal{A}_{m,m'}$ le coefficient de $z^m z'^{m'}$ dans la première et suivant la même marche que précédemment, on trouvera, pour déterminer $\mathcal{A}_{m,m'}$, la règle suivante :

Si l'on pose

$$C = -\frac{f\mathfrak{M}'}{a} \times \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n+n'+\lambda'+\mu'+\iota+\iota'+\ldots\,[\text{illegible}]}\,\dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \\ \times\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\cdot\dfrac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2q-1)}{2.4\ldots(2q)} \\ \times\dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \\ \times\dfrac{(2k+2p)(2k+2p+1)\ldots(2k+2p+\lambda-1)}{1.2\ldots\lambda} \\ \times\dfrac{(2k+2q)(2k+2q+1)\ldots(2k+2q+\mu-1)}{1.2\ldots\mu} \\ \times\dfrac{(2p+1)(2p)\ldots(2p-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'}\cdot\dfrac{(2q+1)(2q)\ldots(2q-\mu'+2)}{1.2\ldots\mu'} \\ \times\dfrac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota}\cdot\dfrac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\varkappa+1)}{1.2\ldots\varkappa} \\ \times\dfrac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'}\cdot\dfrac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\varkappa'+1)}{1.2\ldots\varkappa'} \\ \times\dfrac{m^g}{1.2\ldots\nu\times1.2\ldots(g-\nu)}\cdot\dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu'\times1.2\ldots(g'-\nu')} \\ \times 2^{[\text{illegible}]}\,\varepsilon^{[\text{illegible}]}\,\varepsilon'^{[\text{illegible}]}\,\alpha^{[\text{illegible}]} \\ \times c^k\,\varphi^{[\text{illegible}]}\,\varphi'^{[\text{illegible}]} \end{array} \right\},$$

[illegible] $(q-p)\sigma + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi'$.

le coefficient $\mathcal{A}_{m,m'}$ *est la somme des valeurs que prend le produit* CE^{ix} *quand on attribue aux entiers*

$$k,\ p,\ q,\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \iota,\ \varkappa,\ \iota',\ \varkappa',\ g,\ g',\ \nu,\ \nu'$$

toutes les valeurs positives ou nulles, sans exception, propres à vérifier les deux équations

$$2n - k - p + q - \lambda + \mu - \iota + \varkappa + g - 2\nu = m,$$
$$2n' - k + p - q - \lambda' + \mu' - \iota' + \varkappa' + g - 2\nu' = m',$$

et les inégalités

$$n < k,\quad n' < k,\quad \lambda' < 2p + 1,\quad \mu' < 2q + 1,\quad \iota < n,\quad \varkappa < k - n,$$
$$\iota' < n',\quad \varkappa' < k - n',\quad \nu < g,\quad \nu' < g'.$$

Il nous reste à développer $f\mathcal{M}'\dfrac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3}$ suivant les puissances de z et de z'. Il suffira pour cela, d'après ce qu'on a vu plus haut, de remplacer dans les formules (10) et (11) α par $\frac{1}{\alpha}$, puis d'y donner successivement aux trois entiers k, p, q les trois systèmes de valeurs (6), (7) et (8), en même temps que les autres entiers n, n',..., y recevront tous les systèmes de valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions (12) et (13). La somme des valeurs ainsi obtenues pour CE^{ix}, prise avec un signe contraire, sera le coefficient $\mathcal{B}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans le développement de $f\mathcal{M}'\dfrac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3}$.

Ayant obtenu $\mathcal{A}_{m,m'}$ et $\mathcal{B}_{m,m'}$, on aura pour le coefficient de $z^m z'^{m'}$ dans la fonction R

$$A_{m,m'} = \mathcal{A}_{m,m'} + \mathcal{B}_{m,m'}.$$

Je ferai remarquer, en terminant, l'utilité des formules établies dans ce Mémoire pour le calcul des inégalités d'un ordre élevé qui deviennent sensibles par les petits diviseurs que l'intégration y introduit. On peut bien, lorsque la valeur numérique de la somme $m + m'$ est considérable, calculer le coefficient correspondant par une interpolation,

comme l'a fait M. Le Verrier pour une grande inégalité de Pallas, ou en obtenir une valeur approchée par une méthode remarquable que M. Cauchy a publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (*voir* les t. XIX et XX, et particulièrement les Notes écrites à l'occasion du travail de M. Le Verrier, t. XX, p. 769). Mais de l'une ou de l'autre manière on ne trouve que la valeur numérique du coefficient inconnu et non son expression analytique. Or cette dernière, que nos formules donnent immédiatement, est nécessaire quand on veut déterminer, non-seulement l'inégalité de la longitude moyenne, mais encore les diverses inégalités des éléments correspondantes au terme considéré de la fonction perturbatrice ; car il faut pouvoir prendre les dérivées partielles du coefficient par rapport aux éléments, ce qu'il est impossible de faire sur un simple nombre. J'ajoute que même pour les termes d'un ordre peu élevé, dont l'expression s'obtient sans trop de difficulté par la voie de développement successif ordinairement suivie, les formules de ce Mémoire fournissent un contrôle utile, en permettant de calculer séparément chaque partie du développement sur l'exactitude de laquelle il pourrait rester quelque doute.

THÉORÈME

CONCERNANT

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER CONTENU DANS L'UNE OU L'AUTRE DES DEUX FORMES LINÉAIRES $16k+7$, $16k+11$;

Par M. J. LIOUVILLE.

D'après un théorème, bien connu, de M. Bouniakowsky, tout nombre premier m de la forme $16k+7$ vérifie au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 2x^2 + Q^{4l+1}y^2,$$

où Q est un nombre premier $8\nu+5$, x et y des entiers impairs, positifs et premiers à Q. J'ai donné dans ce Journal (*cahier de mars* 1858) une démonstration de ce beau théorème, différente de celle de M. Bouniakowsky, quoique tirée du même principe, et je pourrais en ajouter d'autres. Mais nos lecteurs préféreront sans doute à ces démonstrations multipliées un théorème nouveau qu'il me sera facile d'énoncer nettement, même dans le peu d'espace que je trouve libre à la fin de cette feuille.

Considérons le double $2m$ d'un nombre premier donné m, qui peut être indifféremment de la forme $16k+7$ employée par M. Bouniakowsky, ou de la forme $16k+11$. Je dis qu'il existe au moins un couple (p, q) de nombres premiers *inégaux*, de la forme $8\nu+3$, laissant vérifier l'équation

$$2m = p^{4\alpha+1}x^2 + q^{4\beta+1}y^2,$$

en prenant pour x, y des entiers positifs, impairs, premiers à p et q. De plus s'il y a divers couples (p, q) jouissant de cette propriété, le nombre en est impair, pourvu, bien entendu, que l'on ne regarde pas

comme distincts les couples (p, q) et (q, p), ou, si l'on veut, pourvu que l'on impose la condition $p < q$. Nous admettons pour α et pour β la valeur zéro. Il est bon de remarquer que p et q étant inégaux, on ne peut avoir ni $p = m$, ni $q = m$. Enfin je rappelle que, m étant un nombre premier, l'équation

$$2m = p^{4\alpha+1}x^2 + q^{4\beta+1}y^2$$

n'a jamais, pour chaque couple (p, q) qu'une seule solution.

Les deux plus petits nombres premiers contenus dans les deux formes

$$16k + 7, \quad 16k + 11$$

sont 7 et 11. Or on a effectivement

$$2.7 = 3.1^2 + 11.1^2, \qquad 2.11 = 3.1^2 + 19.1^2.$$

C'est 23 qui vient ensuite, et l'on a encore

$$2.23 = 3.1^2 + 43.1^2.$$

L'expression que fournit pour 2.23 l'équation

$$2.23 = 3^3.1^2 + 19.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4\alpha + 1$.

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE
DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. PUISEUX.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Les formules du Mémoire précédent fournissent l'expression du coefficient du terme général de la fonction perturbatrice sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de quatre quantités qui sont le sinus carré de la demi-inclinaison mutuelle des orbites, les deux excentricités et le rapport des grands axes. Il y a avantage en effet à développer le coefficient suivant les puissances de ce dernier rapport, quand les deux planètes sont à des distances très-inégales du Soleil : mais lorsqu'au contraire les distances au Soleil de la planète troublée et de la planète perturbatrice ne sont pas très-différentes l'une de l'autre, le rapport des grands axes cesse d'être une petite fraction, et cette circonstance peut rendre fort lente la convergence de notre série, dans le cas même où les deux orbites seraient peu excentriques et faiblement inclinées l'une sur l'autre. Je me propose de montrer ici comment on peut éviter le développement suivant les puissances du rapport des grands axes, en faisant usage des fonctions b de la *Mécanique céleste,* et obtenir le coefficient du terme général de la fonction perturbatrice sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de trois quantités seulement, savoir le sinus carré de la demi-inclinaison mutuelle et les deux excentricités.

Je remarque d'abord que l'inconvénient qu'il s'agit d'éviter n'existe pas pour la partie $f\,\mathfrak{M}'\,\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$ de R ; car les grands axes a et

a' n'y entrent que dans le facteur $\frac{a}{a'^2}$; on pourra donc conserver pour le développement de cette partie les formules du premier Mémoire. D'après cela, pour obtenir les diverses parties CE$^{1\times}$ dont se compose le coefficient $\mathcal{B}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans $f\mathfrak{M}'\frac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$, on devra, après avoir changé le signe du second membre de l'équation (10), substituer dans les équations (10) et (11) les trois systèmes de valeurs

$$k=0,\quad p=1,\quad q=0,$$
$$k=0,\quad p=0,\quad q=1,$$
$$k=1,\quad p=0,\quad q=0,$$

en attribuant d'ailleurs aux autres entiers n, n', etc., toutes les valeurs positives propres à vérifier les conditions (12) et (13). Il faut se rappeler que dans l'équation (10) α désigne le rapport $\frac{a}{a'}$, de sorte que si l'on voulait, suivant l'usage, désigner toujours par α celui des deux quotients $\frac{a}{a'}$, $\frac{a'}{a}$ qui est inférieur à l'unité, il faudrait, dans le cas de $a' < a$, écrire $\frac{1}{\alpha}$ à la place de α.

Nous avons maintenant à former le coefficient $\mathcal{A}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans le développement de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$. Reprenons pour cela l'équation

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}\mathrm{Q}^k,$$

dans laquelle nous devons exprimer chacun des facteurs $\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}$, Q^k en fonction de s et de s'. Nous avons

$$\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}=[r^2+r'^2-2rr'\cos(\mathrm{V}-\mathrm{V}'+\sigma)]^{-\frac{2k+1}{2}};$$

considérons généralement l'expression

$$f(r,r')=(r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta)^{-i},$$

où l'exposant t est un nombre réel quelconque. La fonction $f(r, r')$ sera, pour des valeurs réelles de r, de r' et de θ, développable en une suite de termes proportionnels aux cosinus des multiples de θ; nous pouvons donc poser

$$f(r, r') = \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_t^{(l)} \cos l\theta,$$

$(r, r')_t^{(l)}$ désignant un coefficient qui dépend des valeurs de r et de r', de l'exposant t et de l'indice l. Il s'ensuivra

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}} &= \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} \cos l(\mathrm{V} - \mathrm{V}' + \sigma) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} \mathrm{E}^{il(\mathrm{V} - \mathrm{V}' + \sigma)} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} \mathrm{E}^{-il(\mathrm{V} - \mathrm{V}' + \sigma)}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{i\mathrm{V}} &= s\left(1 - \frac{\omega}{s}\right)(1 - \omega s)^{-1}, & \mathrm{E}^{-i\mathrm{V}} &= \frac{1}{s}(1 - \omega s)\left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-1}, \\ \mathrm{E}^{i\mathrm{V}'} &= s'\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)(1 - \omega' s')^{-1}, & \mathrm{E}^{-i\mathrm{V}'} &= \frac{1}{s'}(1 - \omega' s')\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-1}; \end{aligned}$$

en substituant ces valeurs on trouvera

$$\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} s^l s'^{-l} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^l (1 - \omega s)^{-l} (1 - \omega' s')^l \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-l} \mathrm{E}^{il\sigma} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} s^{-l} s'^l (1 - \omega s)^l \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-l} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^l (1 - \omega' s')^{-l} \mathrm{E}^{-il\sigma} \end{aligned} \right\}.$$

Posons maintenant

$$r = a + \delta a, \quad r' = a' + \delta a',$$

de sorte qu'on ait

$$\delta a = -ae\cos u = -a\varepsilon\omega\left(s+\frac{1}{s}\right),$$

$$\delta a' = -a'e'\cos u' = -a'\varepsilon'\omega'\left(s'+\frac{1}{s'}\right),$$

puis examinons dans quel cas la quantité $f(r, r')$ et par suite le coefficient

$$(r, r')_l^{(l)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(r, r')\cos l\theta\, d\theta \text{ [*]}$$

peuvent être développés suivant les puissances croissantes de δa et de $\delta a'$.

Nous observerons à cet effet que la fonction

$$f(a + x\delta a, a' + x\delta a') = F(x)$$

pourra être développée suivant les puissances entières de x, tant que le module de x sera inférieur au plus petit des modules des valeurs de x qui vérifient l'équation

$$(a + x\delta a)^2 + (a' + x\delta a')^2 - 2(a + x\delta a)(a' + x\delta a')\cos\theta = 0.$$

Ces valeurs de x sont données par la formule

$$x = \frac{a'E^{\pm i\theta} - a}{\delta a - \delta a' E^{\pm i\theta}} = \frac{a'E^{\pm i\theta} - a}{a'e'\cos u' E^{\pm i\theta} - ae\cos u},$$

et on reconnaît aisément que leurs modules sont l'un et l'autre égaux ou supérieurs à la valeur numérique de la quantité $\frac{a'-a}{ae+a'e'}$. Si donc le module de x est inférieur à cette valeur numérique, on aura par la formule de Maclaurin

$$F(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^q}{1.2\ldots q} F^q(0).$$

[*] Il faut, comme on sait, réduire à moitié le second membre de cette formule, quand on y suppose $l = 0$.

En particulier, lorsque la valeur numérique de $\frac{a'-a}{ae+a'e'}$ sera supérieure à l'unité, on pourra dans l'équation précédente faire $x=1$ et elle deviendra

$$f(r,r') = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{1.2\ldots q} \cdot F^{q}(0)$$

$$= \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=q} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots(q-p)} \cdot \frac{d^q f(a,a')}{da^p\, da'^{q-p}}\, \partial a^p\, \partial a'^{q-p},$$

ou bien, en remplaçant q par $p+p'$,

$$f(r,r') = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \cdot \frac{d^{p+p'} f(a,a')}{da^p\, da'^{p'}}\, \partial a^p\, \partial a'^{p'}.$$

On voit donc que la fonction $f(r,r')$ et par suite la quantité $(r,r')_t^{(l)}$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de ∂a et de $\partial a'$, lorsque la valeur numérique de $\frac{ae+a'e'}{a'-a}$ sera inférieure à l'unité. Admettons que cette condition soit remplie, et elle le sera généralement à cause de la petitesse des excentricités : on aura

$$(r,r')_t^{(l)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \frac{d^{p+p'} (a,a')_t^{(l)}}{da^p\, da'^{p'}}\, \partial a^p\, \partial a'^{p'}$$

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} (-1)^{p+p'} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \frac{d^{p+p'} (a,a')_t^{(l)}}{da^p\, da'^{p'}}$$

$$\times (a\varepsilon\omega)^p (a'\varepsilon'\omega')^{p'} \left(s+\frac{1}{s}\right)^p \left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}.$$

Il s'ensuivra

$$P^{\frac{2k+1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{G} s^l s'^{-l}\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^l (1-\omega s)^{-l}(1-\omega' s')^l \\ \times\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^{-l}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}\mathrm{E}^{il\tau} \end{array}\right\} \\ \displaystyle +\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{G} s^{-l} s'^{l}(1-\omega s)^l\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^{-l}\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^l \\ \times(1-\omega' s')^{-l}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}\mathrm{E}^{-il\tau} \end{array}\right\} \end{array}\right\},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{G} = \frac{(-1)^{p+p'}}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots p\times 1.2\ldots p'}\;\frac{d^{p+p'}(a,a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\,da'^{p'}}\;(a\varepsilon\omega)^p(a'\varepsilon'\omega')^{p'},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\mathrm{G} s^l s'^{-l}\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^l(1-\omega s)^{-l}(1-\omega' s')^l \\ \times\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^{-l}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}\mathrm{E}^{il\tau}\mathrm{Q}^k \end{array}\right\} \\ \displaystyle +\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\mathrm{G} s^{-l} s'^{l}(1-\omega s)^l\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^{-l}\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^l \\ \times(1-\omega' s')^{-l}\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}\mathrm{E}^{-il\tau}\mathrm{Q}^k \end{array}\right\} \end{array}\right\},$$

Il faut maintenant dans les deux parties dont cette expression de $\frac{1}{\Delta}$ se compose mettre pour Q^k sa valeur en fonction de s et de s'. Dans la première partie, nous remplacerons Q^k par l'expression obtenue dans le précédent Mémoire, savoir

$$\mathrm{Q}^k = \sum_{n=0}^{n=k}\sum_{n'=0}^{n'=k}\mathrm{H} s^{2n-k}s'^{2n'-k}\left(1-\frac{e}{s}\right)^n(1-es)^{k-n}\left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{n'}(1-e's')^{k-n'}$$
$$\times\,\mathrm{E}^{i[(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$H = (-1)^{k+n+n'}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'}(aa'c)^k.$$

Mais dans la seconde partie nous mettrons pour Q^k la valeur

$$Q^k = \sum_{n=0}^{n=k}\sum_{n'=0}^{n'=k} H s^{-2n+k} s'^{-2n'+k}(1-es)^n\left(1-\frac{e}{s}\right)^{k-n}(1-e's')^{n'}\left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{k-n'}E^{-i[(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']},$$

qui se déduit de la précédente en y changeant n en $k-n$ et n' en $k-n'$. Nous trouverons ainsi

$$-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta} = -f\mathfrak{M}'\times\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty}\sum_{n=0}^{n=k}\sum_{n'=0}^{n'=k}\left\{\begin{aligned}&(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}GH s^{l+2n-k}s'^{-l+2n'-k}\\&\times\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^l(1-\omega s)^{-l}(1-\omega's')^l\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^{-l}\\&\times\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}\left(1-\frac{e}{s}\right)^n(1-es)^{k-n}\\&\times\left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{n'}(1-e's')^{k-n'}E^{i[l\varphi+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']}\end{aligned}\right\}\\+&\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{p'=0}^{p'=\infty}\sum_{n=0}^{n=k}\sum_{n'=0}^{n'=k}\left\{\begin{aligned}&(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}GH s^{-l-2n+k}s'^{l-2n'+k}\\&\times(1-\omega s)^l\left(1-\frac{\omega}{s}\right)^{-l}\left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^l(1-\omega's')^{-l}\\&\times\left(s+\frac{1}{s}\right)^p\left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}(1-es)^n\left(1-\frac{e}{s}\right)^{k-n}\\&\times(1-e's')^{n'}\left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{k-n'}E^{-i[l\varphi+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}.$$

Il reste à multiplier cette valeur de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ par la quantité Π du premier Mémoire, et à chercher dans le produit le coefficient de $s^m s'^{m'}$, lequel ne sera autre chose que $\mathcal{A}_{m,m'}$. On arrivera ainsi à la proposition suivante :

Soient

$$k,\ l,\ p,\ p',\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \varpi,\ \varpi',\ \iota,\ \varkappa,\ \iota',\ \varkappa',\ g,\ g'\ \nu,\ \nu'$$

des nombres entiers positifs satisfaisant aux inégalités

$$(a)\quad \begin{cases} \lambda < l+1, \quad \lambda' < l+1, \quad \varpi < p, \quad \varpi' < p', \quad \iota < n, \\ \varkappa < k-n, \quad \iota' < n', \quad \varkappa' < k-n', \quad \nu < g, \quad \nu' < g' : \end{cases}$$

faisons

$$(b)\quad C = -f\mathfrak{M}' \times \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n+n'+p+p'+\lambda+\lambda'+\iota+\varkappa+\iota'+\varkappa'+\nu+\nu'} \cdot 2^{\iota+\varkappa+\iota'+\varkappa'-1} \\ & \times \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k)} \cdot \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \\ & \times \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda+2)}{1.2\ldots\lambda} \cdot \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu-2)}{1.2\ldots\mu} \\ & \times \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'} \cdot \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu'-2)}{1.2\ldots\mu'} \\ & \times \frac{1}{1.2\ldots\varpi \times 1.2\ldots(p-\varpi)} \cdot \frac{1}{1.2\ldots\varpi' \times 1.2\ldots(p'-\varpi')} \\ & \times \frac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota} \cdot \frac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\varkappa+1)}{1.2\ldots\varkappa} \\ & \times \frac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'} \cdot \frac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\varkappa'+1)}{1.2\ldots\varkappa'} \\ & \times \frac{m^g}{1.2\ldots\nu \times 1.2\ldots(g-\nu)} \cdot \frac{m'^g}{1.2\ldots\nu' \times 1.2\ldots(g-\nu')} \\ & \times \frac{d^{p+p'}(a,a')^{l}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\,da'^{p'}} \cdot a^{k+p}\,a'^{k+p'}\,\varepsilon^{p+\iota+\varkappa+g+1}\,\varepsilon'^{p'+\iota'+\varkappa'+g'+1} \\ & \times c^{l}\,\omega^{p+\lambda+\mu+\iota+\varkappa+g}\,\omega'^{p'+\lambda'+\mu'+\iota'+\varkappa'+g}. \end{aligned} \right.$$

$$(c)\quad \lambda = l\tau + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi'.$$

Cela posé, nommons A_1 *la somme des valeurs que prend l'expression* $CE^{i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers k, l, p, etc., toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier, avec les inégalités* (*a*), *les deux équations*

$$(d_1)\left\{\begin{array}{l} l + 2n - k - \lambda + \mu + p - 2\varpi - \iota + \varkappa + g - 2\nu = m, \\ -l + 2n' - k + \lambda' - \mu' + p' - 2\varpi - \iota' + \varkappa + g' - 2\nu = m'. \end{array}\right.$$

Nommons de même A_2 *la somme des valeurs que prend l'expression* $CE^{-i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers k, l, p, etc., toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier, avec les inégalités* (*a*), *les deux équations*

$$(d_2)\left\{\begin{array}{l} -l - 2n + k + \lambda - \mu - p + 2\varpi + \iota - \varkappa + g - 2\nu = m, \\ l - 2n' + k - \lambda' + \mu' - p' + 2\varpi' + \iota' - \varkappa' + g' - 2\nu' = m'. \end{array}\right.$$

On aura

$$A_{m,m'} = A_1 + A_2.$$

Supposons qu'on ait attribué aux entiers k, l, p, etc., des valeurs propres à vérifier l'un des deux groupes d'équations désignés par (d_1) et (d_2), par exemple le groupe (d_1). Si l'on remplace m par $-m$, m' par $-m'$, ν par $g-\nu$ et ν' par $g'-\nu'$, les autres entiers conservant leurs valeurs primitives, les équations (d_2) seront vérifiées, et le coefficient C ne changera pas non plus que l'angle $\varkappa$. On vérifie de cette manière qu'à chaque terme $CE^{i\varkappa} z^m z'^{m'}$ de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ répond toujours cet autre $CE^{-i\varkappa} z^{-m} z'^{-m'}$, et en réunissant deux à deux ces termes correspondants, on aura $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$, exprimé par une somme de termes réels de la forme $2C\cos(m\zeta + m'\zeta' + \varkappa)$.

Lorsqu'on suit pour le développement de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ la marche qui vient d'être expliquée, le coefficient C ne contient plus les demi grands axes a et a' que dans la fonction

$$\frac{d^{p+p'}(aa')^{i}_{\frac{k+l}{2}}}{da^p\,da'^{p'}}\,a^{l+p}a'^{k+p},$$

qui s'exprime aisément au moyen des fonctions b de la *Mécanique céleste* et de leurs dérivées. En effet si l'on suppose, pour fixer les idées, $a < a'$ et qu'on fasse $\frac{a}{a'} = \alpha$, la fonction de α que Laplace désigne par $b_t^{(l)}$ est définie par l'équation

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta)^{-t} = \frac{1}{2} b_t^{(0)} + b_t^{(1)}\cos\theta + b_t^{(2)}\cos 2\theta + \ldots.$$

Mais nous avons posé

$$(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\theta)^{-t} = (a, a')_t^{(0)} + (a, a')_t^{(1)}\cos\theta + (a, a')_t^{(2)}\cos 2\theta + \ldots;$$

la comparaison de ces deux équations nous donne

$$(a, a')_t^{(l)} = a'^{-2t} b_t^{(l)},$$

le second membre devant être réduit à moitié pour $l = 0$. Cette formule exprime la quantité $(a, a')_t^{(l)}$ au moyen de $b_t^{(l)}$, et en la différentiant successivement par rapport à a et à a', on en déduira l'expression de $\frac{d^{p+p'}(a, a')_t^{(l)}}{da^p\,da'^{p'}}$ en fonction de $b_t^{(l)}$ et de ses dérivées prises par rapport à α.

J'indique en passant des formules qui rendront ces différentiations très-faciles : représentons par (n, h) l'expression

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-h+1)^2(n-h)}{1.2\ldots h},$$

dans laquelle tous les facteurs du numérateur sont élevés au carré, excepté le premier et le dernier, en sorte qu'on ait

$$(n, 0) = 1, \quad (n, 1) = n(n-1), \quad (n, 2) = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{1.2}, \ldots.$$

Soit d'ailleurs v une fonction quelconque de α; ce sera, par exemple,

une des fonctions $b_t^{(l)}$: on aura, quel que soit l'exposant q,

$$a'^{p+q}\frac{d^p(a'^{-q}v)}{da^p}=\frac{d^p v}{d\alpha^p},$$

$$(-1)^{p'} a'^{p'+q}\frac{d^{p'}(a'^{-q}v)}{da'^{p'}}=\alpha^{p'}\frac{d^{p'}v}{d\alpha^{p'}}$$

$$+\left[(p',1)+\frac{p'}{1}\cdot q\right]\alpha^{p'-1}\frac{d^{p'-1}v}{d\alpha^{p'-1}}$$

$$+\left[(p',2)+\frac{p'}{1}\cdot q\,(p'-1,1)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q\,(q+1)\right]\alpha^{p'-2}\frac{d^{p'-2}v}{d\alpha^{p'-2}}$$

$$+\left[(p',3)+\frac{p'}{1}\cdot q\,(p'-1,2)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q\,(q+1)(p'-2,1)+\frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1.2.3}\cdot q\,(q+1)(q+2)\right]$$

$$\times\alpha^{p'-3}\frac{d^{p'-3}v}{d\alpha^{p'-3}}+\ldots,$$

$$(-1)^{p'} a'^{p+p'+q}\frac{d^{p+p'}(a'^{-q}v)}{da^p\,da'^{p'}}=\frac{d^p\left(\alpha^{p'}\frac{d^{p'}v}{d\alpha^{p'}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',1)+\frac{p'}{1}\cdot q\right]\frac{d^p\left(\alpha^{p'-1}\frac{d^{p'-1}v}{d\alpha^{p'-1}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',2)+\frac{p'}{1}\cdot q\,(p'-1,1)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q\,(q+1)\right]\frac{d^p\left(\alpha^{p'-2}\frac{d^{p'-2}v}{d\alpha^{p'-2}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',3)+\frac{p'}{1}\cdot q\,(p'-1,2)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q\,(q+1)(p'-2,1)+\frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1.2.3}\cdot q\,(q+1)(q+2)\right]$$

$$\times\frac{d^p\left(\alpha^{p'-3}\frac{d^{p'-3}v}{d\alpha^{p'-3}}\right)}{d\alpha^p}+\ldots$$

Comme dans le Mémoire précédent, nous désignerons par N l'ordre du coefficient C, les excentricités et l'inclinaison mutuelle étant regardées comme de petites quantités du premier ordre; nous aurons ici

$$N=2k+p+p'+\lambda+\mu+\lambda'+\mu'+\iota+\iota'+\varkappa+\varkappa'+g+g'.$$

Mais selon que les entiers k, l, etc., satisfont aux équations (d_1) ou aux

équations (d_2), on a

$$m + m' = 2n + 2n' - 2k - \lambda + \mu + \lambda' - \mu' + p - 2\varpi + p' - 2\varpi' - \iota + \varkappa - \iota' + \varkappa' + g - 2\nu + g' - 2\nu',$$

ou bien

$$m + m' = 2k - 2n - 2n' + \lambda - \mu - \lambda' + \mu' - p + 2\varpi - p' + 2\varpi' + \iota - \varkappa + \iota' - \varkappa' + g - 2\nu + g' - 2\nu'.$$

Il en résulte, dans le premier cas,

$$\begin{gathered} \mathrm{N} + (m + m') \\ = 2[n + n' + \mu + \lambda' + (p - \varpi) + (p' - \varpi') + \varkappa + \varkappa' + (g - \nu) + (g' - \nu')], \\ \mathrm{N} - (m + m') \\ = 2[(k - n) + (k - n') + \lambda + \mu' + \varpi + \varpi' + \iota + \iota' + \nu + \nu'], \end{gathered}$$

et, dans le second cas,

$$\begin{gathered} \mathrm{N} + (m + m') \\ = 2[(k - n) + (k - n') + \lambda + \mu' + \varpi + \varpi' + \iota + \iota' + (g - \nu) + (g' - \nu')], \\ \mathrm{N} - (m + m') \\ = 2[n + n' + \mu + \lambda' + (p - \varpi) + (p' - \varpi') + \varkappa + \varkappa' + \nu + \nu']. \end{gathered}$$

Par ces formules jointes aux inégalités (a), on voit que l'ordre N n'est jamais inférieur à la valeur numérique de $m + m'$, et que quand il la surpasse, c'est d'un nombre pair.

Proposons-nous, en particulier, de former les parties du coefficient $\mathcal{A}_{m,m'}$ qui sont précisément d'un ordre égal à la valeur numérique de $m + m'$. En supposant, pour fixer les idées, la somme $m + m'$ positive, on voit que si les entiers k, l, etc., satisfont aux équations (d_1), on devra avoir

$$n = n' = k, \quad \lambda = \mu' = \varpi = \varpi' = \iota = \iota' = \varkappa = \varkappa' = \nu = \nu' = 0,$$

et que si les entiers k, l, etc., vérifient les équations (d_2), on devra avoir

$$n = n' = \mu = \lambda' = \iota = \iota' = \varkappa = \varkappa' = \nu = \nu' = 0, \quad p = \varpi, \quad p' = \varpi'.$$

De là on conclut aisément la règle suivante :

La somme $m+m'$ étant supposée positive, soit d'abord

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} f \mathfrak{M}' (-1)^{p+p'+\lambda'} \cdot \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu-2)}{1.2\ldots\mu} \\ \times \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p'} \cdot \frac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \frac{m'^g}{1.2\ldots g'} \\ \times \frac{d^{p+p'} (a, a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\, da'^{p'}} a^{k+p} a'^{k+p'} \varepsilon^{p+g+1} \varepsilon'^{p'+g'+1} c^k \\ \times \omega^{p+\mu+g} \omega'^{p'+\lambda'+g'} \end{array} \right\},$$

$$\varkappa_1 = l\sigma + k(\varphi + \varphi'),$$

et nommons B_1 *la somme des valeurs que prend le produit* $C_1 E^{i\varkappa_1}$, *quand on attribue aux entiers* $k, l, p, p', \mu, \lambda', g, g'$ *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions*

$$\lambda' < l+1, \quad l+k+\mu+p+g = m, \quad -l+k+\lambda'+p'+g' = m'.$$

Soit, en second lieu,

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} f \mathfrak{M}' (-1)^{p+p'+\lambda} \cdot \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda+2)}{1.2\ldots\lambda} \\ \times \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu'-2)}{1.2\ldots\mu'} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p'} \cdot \frac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \frac{m'^g}{1.2\ldots g'} \\ \times \frac{d^{p+p'} (a, a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\, da'^{p'}} a^{k+p} a'^{k+p'} \varepsilon^{p+g+1} \varepsilon'^{p'+g'+1} c^k \\ \times \omega^{p+\lambda+g} \omega'^{p'+\mu'+g'} \end{array} \right\},$$

$$\varkappa_2 = -l\sigma + k(\varphi + \varphi'),$$

et nommons B_2 *la somme des valeurs que prend le produit* $C_2 E^{i\varkappa_2}$, *quand on attribue aux entiers* $k, l, p, p', \lambda, \mu', g, g'$ *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions*

$$\lambda < l+1, \quad -l+k+\lambda+p+g = m, \quad l+k+\mu'+p'+g' = m'.$$

La somme $B_1 + B_2$ *sera dans* $\mathcal{A}_{m,m'}$ *la partie qui est précisément de l'ordre* $m + m'$.

On peut remarquer que si les nombres m et m' sont de signes contraires, l'une des deux équations

$$l - k + \mu + p + g = m, \quad l + k + \mu' + p' + g' = m'$$

est impossible, et qu'ainsi des deux sommes B_1, B_2, il y en a une qui se réduit à zéro.

SUR

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER $4\mu + 1$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné $4\mu + 1$. Nous allons rapprocher du double de m les nombres premiers p de la forme $8n + 1$. A cet effet, je pose de toutes les manières possibles l'équation

$$2m = x^2 + p^{4l+1}.y^2,$$

où l'on doit prendre successivement tous les nombres p cités, et où x et y sont des entiers impairs non divisibles par p : on admet pour l la valeur zéro. J'ai trouvé et je vais donner une règle simple pour décider si le nombre N des décompositions de $2m$ sous la forme indiquée est pair ou impair, zéro étant regardé comme un nombre pair. Le cas de N impair offre surtout de l'intérêt, car alors on peut affirmer qu'il y a au moins un nombre premier p de la forme $8n + 1$ lié à m par notre équation.

Comme on a $m = 4\mu + 1$, on peut décomposer le double du nombre premier m en une somme de deux carrés impairs, et cela d'une seule manière. Soit donc

$$2m = a^2 + b^2.$$

Cherchons combien de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $4s + 1$, entrent dans la composition de a et de b, ou, si l'on veut, dans la composition du produit ab. Soit σ le nombre ainsi obtenu, dans lequel on pourrait, sans inconvénient pour l'usage que nous en ferons, supprimer les multiples de 2.

Je me suis assuré que l'on a toujours

$$N \equiv \mu + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que N soit impair, c'est que σ soit pair quand μ est pair, impair quand μ est impair, ou,

en d'autres termes, que σ soit pair quand $m = 8\nu + 1$, impair quand $m = 8\nu + 5$.

Les plus petits nombres premiers de la forme $8\nu + 5$ sont 5 et 13. On a

$$2.5 = 1^2 + 3^2, \quad 2.13 = 1^2 + 5^2,$$

de sorte que $\sigma = 0$ pour $m = 5$, mais $= 1$ pour $m = 13$. Ainsi N est pair pour $m = 5$, mais impair pour $m = 13$. Or on peut aisément vérifier que les valeurs de N relatives à ces deux nombres sont respectivement 0 et 1, la dernière valeur provenant de ce que

$$2.13 = 3^2 + 17.1^2.$$

Quant à la forme $8\nu + 1$, le plus petit nombre premier qu'elle fournit est 17. On a

$$2.17 = 3^2 + 5^2,$$

d'où $\sigma = 1$, partant N pair; or il est aisé de voir que, dans ce cas, $N = 0$.

Voici une autre règle tout aussi commode pour déterminer la nature de N. Conservons les notations précédentes, et cherchons combien dans la composition du produit ab il entre de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $8g + 1$ et de la forme $8g + 3$. En désignant par τ le nombre ainsi obtenu, on aura cette seconde congruence

$$N \equiv \tau + 1 \pmod{2}:$$

en sorte que N est impair quand τ est pair et *vice versâ*, comme on peut le vérifier sur les exemples ci-dessus. On remarquera ce corollaire, que toujours $\tau \equiv \mu + \sigma \pmod{2}$, chose aisée, du reste, à établir directement.

NOTE

SUR

UN THÉORÈME DE M. SYLVESTER

RELATIF

A LA TRANSFORMATION DU PRODUIT DE DÉTERMINANTS DU MÊME ORDRE;

Par M. J.-F. DE SPERLING.

La démonstration de ce théorème, donnée par M. Sylvester dans le journal *The London, Edinburgh and Dublin philosophical magasine and journal of science*, pour l'année 1851, bien que tout à fait rigoureuse, n'est cependant pas, selon moi, assez satisfaisante, en ce sens qu'elle ne montre pas la liaison qui existe entre ce théorème et les autres vérités de la théorie des déterminants; ce qui fait penser que ce théorème a pour but de donner une propriété nouvelle et fondamentale des déterminants, tandis qu'elle n'est qu'un simple corollaire de deux propriétés, depuis longtemps connues, de ces fonctions.

La démonstration de M. Faa de Bruno [*] se trouve être dans le même cas. Je donne dans cette Note une nouvelle démonstration, qui, sans être moins rigoureuse, a l'avantage de donner la susdite liaison.

Théorème.

Le produit de deux déterminants d'un même ordre, n par exemple, peut être exprimé par une somme de plusieurs produits, semblables au produit proposé et qui s'en déduisent de la manière suivante.

Je représente par A et B les deux facteurs du produit donné et je

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. J. Liouville t. XVII (1852).

divise les lignes verticales (ou horizontales) de chacun des systèmes de ces facteurs en deux groupes arbitraires, et soit dans l'un des groupes m le nombre des lignes et dans l'autre $n-m$. Tirons maintenant une ligne verticale (ou horizontale) du premier groupe du système A, ainsi que du premier groupe du système B, et remplaçons-les l'une par l'autre; faisons-en autant pour chacune des lignes du premier groupe des deux systèmes. Nous aurons ainsi deux nouveaux systèmes, et le produit de leurs déterminants se trouvera compris dans la somme identiquement égale au produit proposé. Les autres termes de cette somme s'obtiennent de la même manière, à cette différence près que le groupe de m lignes dans le système de l'un des facteurs, B par exemple, sera formé successivement par toutes les différentes combinaisons des n lignes verticales (ou horizontales) prises m à m, tandis que la subdivision des lignes du système de l'autre facteur A restera constante.

Démonstration.

Supposons que ce théorème soit vrai pour le cas où le nombre des lignes à substituer est $m-1$, et démontrons que, cette supposition faite, il a lieu aussi pour le nombre m. Ayant donné cette démonstration, nous prouverons la justesse du théorème pour $m=1$, et c'est de cette manière que nous l'établirons dans toute sa généralité.

1. Considérons l'identité

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{cccccccccccc}
a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2}\ldots & b_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{2,n} & b_{2,1} & b_{2,2}\ldots & b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{n,n} & b_{n,1} & b_{n,2}\ldots & b_{n,n} \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{1,n-m+1} & a_{1,n-m+2}\ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2}\ldots & b_{1,n} \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{2,n-m+1} & a_{2,n-m+2}\ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_{2,1} & b_{2,2}\ldots & b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{n,n-m+1} & a_{n,n-m+2}\ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & b_{n,1} & b_{n,2}\ldots & b_{n,n}
\end{array}\right| = 0 \text{ (*)}.$$

(*) Il est facile de vérifier cette équation : en effet, il suffit pour cela de développer le déterminant, formant son premier membre, en une somme de produits de deux dé-

Développons d'après le théorème de Laplace le premier membre de cette identité en une somme de produits de deux déterminants partiels de l'ordre n, et rapportons les n lignes horizontales supérieures à l'un des groupes et les n lignes horizontales inférieures à l'autre groupe. Ce développement contiendra :

1°. Tous les produits possibles dont l'un des facteurs aurait un système de la forme

$$(2)\quad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{n,n} \end{matrix}$$

où sur les $m-1$ lignes verticales marquées par des astérisques se trouvent rangées $m-1$ lignes verticales quelconques du système

$$(3)\quad \begin{matrix} b_{1,1} \cdots b_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1} \cdots b_{n,n} \end{matrix}$$

L'autre facteur aura un système que l'on formera en remplaçant dans le système (3) chaque ligne qui a contribué à la formation du premier facteur par celle du système

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

qui en a été chassée, dans la même formation, par la ligne à remplacer.

---

terminants partiels (d'après le théorème de Laplace), l'un de l'ordre $n-1$, l'autre de l'ordre $n+1$, en adoptant la subdivision des lignes verticales pour constante, et rapportant au premier groupe les $n-1$ premières lignes et à l'autre les $n+1$ lignes restantes. On trouvera de cette manière que dans tout produit le facteur de l'ordre $n+1$ est nul, parce que son système renferme au moins deux lignes horizontales dont les éléments correspondants sont égaux.

Le signe de chacun des produits de ce genre sera donné par l'expression $(-1)^{m-1}$. En vertu de la supposition faite au début de la démonstration, cette somme peut être représentée par le produit

$$(-1)^{m-1}\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}\cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n,1}\cdots & b_{n,n}\end{vmatrix}$$

2°. Tous les produits que l'on peut former en agissant de la même manière que précédemment, sauf à remplacer le système (2) par celui-ci

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\cdots & a_{1,n-m} & \star & \star\cdots\star \\ a_{2,1} & a_{2,2}\cdots & a_{2,n-m} & \star & \star\cdots\star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\cdots & a_{n,n-m} & \star & \star\cdots\star \end{vmatrix}$$

Il est clair que tous ces produits auront dans le développement le même signe qui sera donné par l'expression $(-1)^m$.

En désignant par $\mathbf{S}$ la somme arithmétique de ces derniers produits, nous aurons

$$(-1)^{m-1}\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}\cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n,1}\cdots & b_{n,n}\end{vmatrix} + (-1)^m\,\mathbf{S} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}\cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n,1}\cdots & b_{n,n}\end{vmatrix} = \mathbf{S},$$

équation qui est une expression analytique du théorème proposé pour le cas où l'on adopte la subdivision des lignes verticales des systèmes. Car bien que la dernière équation ne se rapporte qu'au

cas où les lignes à substituer sont les dernières dans le système (4), la vérité du théorème subsiste néanmoins dans tout autre cas, vu que nous n'avons fait aucune supposition relativement à ces lignes et que dans un déterminant toutes les lignes verticales de son système jouent le même rôle.

Pour démontrer notre théorème dans le cas de subdivision en groupes de lignes horizontales du système, il suffit de remplacer dans l'équation ci-dessus les systèmes des déterminants qui y figurent par leurs conjugués.

2. Il nous reste maintenant à prouver que notre théorème se trouve vrai pour le cas $m = 1$; mais c'est ce qui suit immédiatement de la décomposition en somme de produits de deux déterminants partiels de l'ordre n du premier membre de l'identité que voici :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu} & a_{1,\nu+1}\cdots & a_{1,n} & b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}\cdots & a_{n,\nu-1} & a_{n,\nu} & a_{n,\nu+1}\cdots & a_{n,n} & b_{n,1}\cdots & b_{n,n} \\ 0 & 0 & a_{1,\nu} & 0\ldots & 0 & b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n,\nu} & 0\ldots & 0 & b_{n,1}\cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, procédant à cette décomposition d'une manière parfaitement analogue à celle que nous avons employée en décomposant le premier membre de l'équation (1), nous trouvons

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}\cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1}\cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n,1}\cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{S}_p \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\cdots & a_{1,\nu-1} & b_{1,p} & a_{1,\nu+1}\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\cdots & a_{2,\nu-1} & b_{2,p} & a_{2,\nu+1}\cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\cdots & a_{n,\nu-1} & b_{n,p} & a_{n,\nu+1}\cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2}\cdots & b_{1,p-1} & a_{1,\nu} & b_{1,p+1}\cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2}\cdots & b_{2,p-1} & a_{2,\nu} & b_{1,p+1}\cdots & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1} & b_{n,2}\cdots & b_{n,p-1} & a_{n,\nu} & b_{n,p+1}\cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

où le signe $\mathbf{S}_p$ dénote qu'il faut prendre la somme arithmétique des termes qu'on obtient en substituant successivement dans l'expression sous le signe à la place de p tous les nombres de la série $1, 2, 3, \ldots, n$.

La dernière équation exprime évidemment notre théorème pour le cas $m = 1$.

NOTE

A L'OCCASION D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit n un nombre premier de la forme $4s+3$. Il suit du théorème de Wilson, que toujours

$$1.2.3\ldots(2s+1) \equiv \pm 1 \pmod{n};$$

mais il reste à décider quel signe on doit prendre dans chaque cas particulier donné. En proposant ce problème dans le Journal de Crelle, Dirichlet ajoute que la question revient à chercher si le produit $1.2.3\ldots(2s+1)$ est ou n'est pas résidu quadratique de n; ce qui se conclut immédiatement de ce que 1 est résidu et -1 non-résidu de tout nombre premier $4s+3$. Donc, en appelant B le nombre des non-résidus quadratiques de n contenus dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 2s+1,$$

on devra prendre le signe $+$ si B est pair, le signe $-$ si B est impair. Dès lors tout se réduit à trouver la valeur de B (mod. 2); mais il faut ici une méthode abrégée : le calcul direct serait impraticable pour un nombre n un peu grand.

Parmi les règles plus ou moins simples que l'on a données à ce sujet, on distingue celle de M. Kronecker. Considérons la suite

$$n-2^2,\quad n-4^2,\quad n-6^2,\ldots,\quad n-(2\omega)^2,$$

où $(2\omega)^2$ est le plus grand carré pair contenu dans n. Soit ν le nombre des termes de cette suite qui sont de la forme

$$p^{4l+1}q^2$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas r. M. Kronecker nous apprend que l'on a

$$B \equiv \nu \pmod{2}.$$

Des recherches entreprises dans un tout autre but m'ont conduit pour le cas de s pair, c'est-à-dire pour les nombres premiers n de la forme $8k+3$, à une règle nouvelle, qui a quelque analogie avec la précédente, mais où les carrés retranchés de n sont impairs au lieu d'être pairs. Soit i le plus grand carré impair contenu dans n. Considérons les divers termes de la suite

$$n-1^2,\quad n-3^2,\quad n-5^2,\ldots,\quad n-i^2,$$

et soit τ le nombre de ceux d'entre eux qui peuvent se mettre sous la forme

$$2q^{4\alpha+1}t^2,$$

q étant un nombre premier qui ne divise pas t. D'un autre côté, décomposons n sous la forme

$$n = a^2 + 2b^2,$$

ce qu'on peut toujours faire (d'une seule manière) pour un nombre premier $8k+3$, et cherchons le nombre σ des facteurs premiers égaux ou inégaux de la forme $4g+1$ qui entrent dans la composition de b. Notre théorème consiste en ce que l'on a

$$B \equiv \sigma + \tau \pmod{2}.$$

Pour le nombre 11, par exemple, on trouve aisément $B=1$, $\nu=1$, $\sigma=0$, $\tau=1$, et la double congruence

$$B \equiv \nu \equiv \sigma + \tau \pmod{2}$$

est vérifiée. Pour $n=19$, il vient $B=3$, $\nu=1$, $\sigma=0$, $\tau=1$: même conclusion.

SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ;

Par M. HOUSEL.

Les traités élémentaires sur les surfaces du second degré indiquent à quels caractères on peut reconnaître si elles sont de révolution, quand les axes donnés sont rectangulaires. Il serait bon, je crois, de formuler *explicitement* ces conditions dans le cas général des axes obliques. Je viens donc, après d'autres auteurs, proposer mes vues à ce sujet. Rappelons d'abord quelques résultats connus.

I. Soit, en coordonnées obliques,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

l'équation d'une surface du second degré rapportée à son centre; soit R le rayon d'une sphère concentrique, ayant avec la surface un point commun représenté par ses coordonnées x', y', z', et en ce point un plan tangent commun; si nous posons

$$\frac{x'}{z'} = \mu, \quad \frac{y'}{z'} = \nu \quad \text{et} \quad s = -\frac{F}{R^2},$$

nous aurons

$$s = \frac{A\mu + B''\nu + B'}{\mu + \nu\cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B''\mu + B}{\nu + \mu\cos xy + \cos yz} = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu\cos xz + \nu\cos yz};$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{(s\cos xz - B')(s - A') - (s\cos yz - B)(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

$$\nu = \frac{(s\cos yz - B)(s - A) - (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

ainsi que l'équation du troisième degré en s, qui donne les longueurs des axes principaux, mais que nous n'écrivons pas ici, parce que nous n'avons point encore à en faire usage.

Si la surface est de révolution, celui des axes principaux qui devient le rayon central a une direction indéterminée. Donc, pour la valeur correspondante de s, les valeurs de μ et de ν se présentent, en général, sous la forme $\frac{0}{0}$. On a, par conséquent,

$$(s\cos xy - B'')^2 = (s - A)(s - A'),$$
$$(s\cos xz - B')(s - A') = (s\cos yz - B)(s\cos xy - B''),$$
$$(s\cos yz - B)(s - A) = (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'').$$

Mais ces trois équations se réduisent à deux, car le produit des deux dernières fait retrouver la première : en effet, il suffirait que l'une des quantités μ ou ν fût indéterminée.

En développant la première équation, on obtient

$$(1)\qquad s^2\sin^2 xy - s(A + A' - 2B''\cos xy) + AA' - B''^2 = 0,$$

et la symétrie donne encore deux relations analogues.

Les deux autres égalités deviennent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &s^2(\cos xz - \cos xy\cos yz)\\ &- s(B' - B\cos xy - B''\cos yz + A'\cos xz) + A'B' - BB'' = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &s^2(\cos yz - \cos xy\cos xz)\\ &- s(B - B'\cos xy - B''\cos xz + A\cos yz) + AB - B'B'' = 0,\end{aligned}\right.$$

et la symétrie conduit aussi à une troisième équation analogue.

II. Chacune de ces six équations est satisfaite par la valeur cherchée de s, qui correspond au rayon central, mais aussi chacune d'elles a une racine étrangère. Pour trouver la racine commune, il faut éliminer s^2 entre deux de ces équations, considérées comme étant du premier degré à deux inconnues. Nous ne prendrons pas deux égalités telles que (2) et (3), d'où l'on tirerait une valeur de s qui serait indéterminée pour des axes rectangulaires, mais nous combinerons les équations (1) et (2), et nous obtiendrons, par le calcul indiqué,

$$(4)\quad s = \frac{\sin^2 xy(A'B' - BB'') - (\cos xz - \cos xy\cos yz)(AA' - B''^2)}{\sin^2 xy(B' - B\cos xy - B''\cos yz + A'\cos xz) - (\cos xz - \cos xy\cos yz)(A + A' - 2B''\cos xy)}.$$

En combinant les équations (1) et (3), on trouvera de même

$$(5)\quad s = \frac{\sin^2 xy(\mathrm{AB} - \mathrm{B'B''}) - (\cos yz - \cos xy \cos zx)(\mathrm{AA'} - \mathrm{B''^2})}{\sin^2 xy(\mathrm{B} - \mathrm{B'}\cos xy - \mathrm{B''}\cos xz + \mathrm{A}\cos yz) - (\cos yz - \cos xy \cos zx)(\mathrm{A} + \mathrm{A'} - 2\mathrm{B''}\cos xy)};$$

expression qui se déduit de la précédente, si l'on change les quantités relatives à x dans les quantités relatives à y, et réciproquement.

On aura donc une équation de condition en égalant deux valeurs de s, telles que (4) et (5).

Dans cette opération, on reconnaît d'abord que les termes qui ne contiennent pas le facteur $\sin^2 xy$ se détruisent; on peut donc supprimer ce facteur dans l'équation de condition, qui devient, en faisant quelques réductions et surtout en réunissant les termes qui ont $(\mathrm{AA'} - \mathrm{B}^2)\sin^2 xy$ pour facteur :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 xy \left[\begin{aligned} &\mathrm{B}(\mathrm{A'B'} - \mathrm{BB''}) - \mathrm{B'}(\mathrm{AB} - \mathrm{B'B''}) \\ &+ \cos xy(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{A'B'^2}) \\ &+ 2(\mathrm{AA'} - \mathrm{B''^2})(\mathrm{B'}\cos yz - \mathrm{B}\cos xz) \end{aligned}\right] \\ &+ (\mathrm{AA'} - \mathrm{B''^2})\left[\begin{aligned} &\cos xy(\mathrm{A}\cos^2 yz - \mathrm{A'}\cos^2 xz) \\ &+ (\mathrm{A'} - \mathrm{A})\cos xz \cos yz + \mathrm{B''}(\cos^2 xz - \cos^2 yz) \end{aligned}\right] \\ &+ (\mathrm{A} + \mathrm{A'} - 2\mathrm{B''}\cos xy)\left[\begin{aligned} &(\mathrm{AB} - \mathrm{B'B''})(\cos xz - \cos xy \cos yz) \\ &- (\mathrm{A'B'} - \mathrm{BB''})(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{aligned}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Connaissant cette relation entre A et A', on en trouverait symétriquement deux autres (7) et (8) entre A, A'' et A', A'' : nous nous dispenserons de les écrire, mais chacune des trois doit rentrer dans les deux autres, puisqu'il n'y a en tout que deux conditions.

III. On aurait pu résoudre le même problème au moyen de l'équation du troisième degré en s, que nous avons laissée de côté et qui donne les carrés des axes diamétraux. Pour que la surface soit de révolution, il faut et il suffit que cette équation ait deux racines égales, ce qui semble ne donner qu'une condition; mais comme nous savons qu'il y en a deux, il faut nécessairement que cette unique équation de condition se décompose dans la somme de deux carrés : seulement ces calculs seraient très-pénibles.

Nous n'aurons pas non plus besoin de cette équation du troisième degré pour trouver le rayon central $R^2 = -\frac{F}{s}$, en indiquant toujours par s la valeur connue par les expressions (4) ou (5). On s'en passera encore pour trouver le plan des rayons centraux, car la troisième valeur de s, dans les formules préliminaires, nous donne

$$\mu(s\cos xz - B') + \nu(s\cos yz - B) + s - A'' = 0,$$

et comme les équations d'un rayon central quelconque sont

$$x = \mu z, \quad y = \nu z,$$

celle du plan cherché devient

$$x(s\cos xz - B') + y(s\cos yz - B) + z(s - A'') = 0; \tag{9}$$

il suffira d'y remplacer s par l'expression (4).

Enfin l'axe de révolution est perpendiculaire à ce plan; mais, pour déterminer complétement cet axe, il vaut mieux avoir recours à l'équation du troisième degré en s, que nous allons écrire :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
& s^3(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy\cos xz\cos yz \\
& - s^2\left\{\begin{aligned} & A\sin^2 yz + A'\sin^2 xz + A''\sin^2 xy \\ & - 2B''(\cos xy - \cos xz\cos yz) \\ & - 2B'(\cos xz - \cos xy\cos yz) \\ & - 2B(\cos yz - \cos xy\cos xz) \end{aligned}\right. \\
& - s\left\{\begin{aligned} & B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ & + 2\cos yz(AB - B'B'') + 2\cos xz(A'B' - BB'') \\ & + 2\cos xy(A''B'' - BB') \end{aligned}\right. \\
& + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.
\end{aligned}\right.$$

Cette équation ayant ici deux racines égales, son premier membre se décompose en deux facteurs, l'un du second, l'autre du premier degré. Nous aurons donc l'axe de révolution en égalant à zéro ce dernier facteur, ce qui donnera

$$s_1 + p + 2s = 0. \tag{11}$$

Ici s représente toujours la valeur donnée par l'expression (4), s_1 correspond à l'axe de révolution, et

$$s_1 = \frac{2B''(\cos xy - \cos xz \cos yz) + 2B'(\cos xz - \cos xy \cos yz) + 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) - A\sin^2 yz - A'\sin^2 xz - A''\sin^2 xy}{1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy \cos xz \cos yz}$$

Connaissant s_1, on aura le carré du demi-axe de révolution, qui sera $-\frac{F}{s_1}$: pour trouver la direction de cet axe, il suffit de remplacer s par s_1 dans les valeurs de μ et de ν, ce qui donnera μ_1 et ν_1.

IV. Maintenant il faut examiner dans quelles circonstances les formules précédentes peuvent être en défaut.

Si nous indiquons, pour abréger, les formules (4) et (5) par

$$s = \frac{a}{b}, \quad s = \frac{a'}{b'},$$

l'équation de condition (6) deviendra $ab' - a'b = 0$. Or si nous avons à la fois $a = 0$, $b = 0$, cette condition sera satisfaite, ainsi que toutes celles qui pourraient être déduites de l'expression

$$s = \frac{a}{b} :$$

cependant rien ne prouve que la surface soit de révolution tant qu'on n'a pas trouvé une seconde condition qui ne soit pas nécessairement satisfaite pour $a = 0$ et $b = 0$; il faut aussi obtenir une valeur de s qui ne devienne pas alors indéterminée.

Pour y parvenir dans toutes les circonstances, nous prendrons l'équation (1)

$$s^2 \sin^2 xy - s(A + A' - 2B''\cos xy) + AA' - B''^2 = 0,$$

et nous la combinerons, par le procédé déjà employé, avec l'une des deux autres équations analogues, telle que

$$s^2 \sin^2 xz - s(A + A'' - 2B'\cos xz) + AA'' - B'^2 = 0,$$

ce qui donnera

$$(12) \quad s = \frac{(AA'' - B'^2)\sin^2 xy - (AA' - B''^2)\sin^2 xz}{\sin^2 xy\,(A + A'' - 2B'\cos xz) - \sin^2 xz\,(A + A' - 2B''\cos xy)}.$$

on aurait de même

$$(13)\quad s = \frac{(A'A'' - B^2)\sin^2 xy - (AA' - B''^2)\sin^2 yz}{\sin^2 xy\,(A' + A'' - 2B\cos yz) - \sin^2 yz\,(A + A' - 2B''\cos xy)}.$$

Égalant ces deux valeurs de s, observant que les termes indépendants de $\sin^2 xy$ se détruisent, et supprimant ce facteur commun, il reste

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 xy\left[\begin{aligned} &(AA'' - B'^2)(A' + A'' - 2B\cos yz)\\ -&(A'A'' - B^2)(A + A'' - 2B'\cos xz)\end{aligned}\right]\\ +&\sin^2 xz\left[\begin{aligned} &(A'A'' - B^2)(A + A' - 2B''\cos xy)\\ -&(AA' - B''^2)(A' + A'' - 2B\cos yz)\end{aligned}\right]\\ +&\sin^2 yz\left[\begin{aligned} &(AA' - B''^2)(A + A'' - 2B'\cos xz)\\ -&(AA'' - B'^2)(A + A' - 2B''\cos xy)\end{aligned}\right] = 0,\end{aligned}\right.$$

équation de condition symétrique entre x, y et z, et, par suite, plus convenable que toute autre pour suppléer à l'insuffisance accidentelle des formules déjà écrites; de même on pourra recourir à une expression telle que l'équation (12), si l'équation (4) donne s sous la forme $\frac{0}{0}$.

V. Nous allons déduire, de ce qui précède, les formules relatives aux axes rectangulaires. Les expressions (4) et (5) deviennent alors

$$s = \frac{A'B' - BB''}{B'}, \quad s = \frac{AB - B'B''}{B},$$

et, par symétrie,

$$s = \frac{A''B'' - BB'}{B''};$$

d'où l'on conclut

$$s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B}.$$

Ce résultat s'accorde avec une équation de condition telle que l'équation (6) qui se réduit à

$$B(A'B' - BB'') = B'(AB - B'B'')$$

ou bien

$$BB'(A'-A)+B''(B'^2-B^2)=0,$$

et symétriquement on a

$$BB''(A''-A)+B'(B''^2-B^2)=0,$$
$$B'B''(A''-A')+B(B''^2-B^2)=0.$$

Pour trouver

$$s_1=-p-2s,$$

observons que

$$-p=A+A'+A''$$

et

$$-2s=-2A''+\frac{2BB'}{B''};$$

donc

$$s_1=A+A'-A''+\frac{2BB'}{B''}.$$

Mais

$$A'-A''=\frac{BB''}{B'}-\frac{BB'}{B''},$$

d'où

$$s_1=A+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''}.$$

Ainsi

$$s_1-A=\frac{B(B''^2+B'^2)}{B'B''},$$

de même

$$s_1-A'=\frac{B'(B''^2+B^2)}{BB''};$$

transportant ces valeurs dans les expressions de μ et de ν, qui deviennent alors

$$\mu_1=\frac{B'(s_1-A')+BB''}{(s_1-A)(s_1-A')-B''^2},\qquad \nu_1=\frac{B(s_1-A)+B'B}{(s_1-A)(s_1-A')-B''^2},$$

et réduisant, il reste

$$\mu_1=\frac{B''}{B},\quad \nu_1=\frac{B'}{B'}.$$

L'équation (9) du plan des rayons centraux devient

$$By + B'x = z(s - A''),$$

et se réduit à

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Les équations (12) et (13) nous donnent alors

$$s = \frac{A(A'' - A') - B'^2 + B''^2}{A'' - A'}$$

et

$$s = \frac{A'(A'' - A) - B^2 + B''^2}{A'' - A},$$

d'où

$$s = A + \frac{B''^2 - B'^2}{A'' - A'} = A' + \frac{B''^2 - B^2}{A'' - A} = A'' + \frac{B'^2 - B^2}{A' - A};$$

enfin, l'équation (14) se réduit à

$$(A'A'' - B^2)(A' - A'') + (AA'' - B'^2)(A'' - A) \\ + (AA' - B''^2)(A - A') = 0,$$

ce qui se ramène à

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A' - A'')(A'' - A)(A - A') + B^2(A' - A'') \\ \qquad + B'^2(A'' - A) + B''^2(A - A') = 0. \end{array} \right.$$

Nous pouvons appliquer ici ce que nous avons dit sur la manière de lever l'indétermination des formules.

Si un seul des trois coefficients B, B', B'' est nul, si par exemple $B = 0$, il n'y a pas encore d'indétermination, parce que la condition

$$BB'(A' - A) + B''(B'^2 - B^2) = 0,$$

déduite de l'équation (6), se réduit à $B''B'^2 = 0$, ce qui prouve que la surface n'est pas de révolution. Mais si l'on a à la fois $B = 0$, $B' = 0$, les trois conditions que nous avons écrites sont satisfaites, sans que la surface soit nécessairement de révolution, car cela tient à ce que les deux valeurs

$$s = A' - \frac{BB''}{B'} \quad \text{et} \quad s = A - \frac{B'B''}{B},$$

respectivement déduites des expressions (4) et (5), sont alors indéterminées : dans ce cas l'équation (15) nous donnera la condition

$$B''^2 = (A'' - A)(A'' - A'),$$

et la valeur

$$s = A'' + \frac{B'^2 - B^2}{A' - A}$$

devient

$$s = A''.$$

On en conclut

$$s_1 = A + A' - A'',$$

mais les valeurs de μ_1 et de ν_1, qui se présentent sous une forme infinie, montrent seulement que l'axe de révolution est alors dans le plan des xy. Son coefficient angulaire dans ce plan sera

$$\frac{y}{x} = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{B}{B'} = \frac{(s_1 - A)B''}{B''^2 + B'^2},$$

ce qui donne les équations de cet axe

$$\frac{y}{x} = \frac{A' - A''}{B''} = \frac{B''}{A - A''}, \quad z = 0.$$

VI. Il nous reste à dire un mot des surfaces de révolution qui n'ont pas de centre unique, c'est-à-dire du paraboloïde et du cylindre de révolution.

Pour le cylindre, nous appliquerons ce qui vient d'être dit jusqu'à présent. En effet, le centre de la surface représentée par l'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx$$
$$+ 2C'y + 2C''z + E = 0,$$

étant toujours donné par les équations dérivées prises relativement à chaque variable, et deux de ces équations étant identiques, ce qui fait que tous les points d'une même droite sont des centres, nous prendrons un quelconque de ces points pour origine, et nous retrouve-

rons, avec toutes ses conséquences, l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

d'où nous étions partis.

Seulement, comme on a ici

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

l'équation (10) donne une valeur infinie pour le diamètre principal qui est dirigé suivant l'axe du cylindre, mais l'on trouvera encore de même les conditions nécessaires pour que la surface soit de révolution, et la valeur de s; quant au rayon central, on a toujours

$$R^2 = -\frac{F}{s} \quad \text{et} \quad F = Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 + E,$$

en indiquant par x_1, y_1, z_1 les cooordonnées du centre pris sur l'axe du cylindre : d'après les conditions nécessaires pour que la surface soit un cylindre, cette valeur de F sera indépendante de la position de ce point sur cet axe.

Enfin les calculs faits pour les surfaces à centre s'appliquent aussi aux paraboloïdes, car en établissant les conditions nécessaires pour qu'un plan diamétral soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales, on trouve, quelle que soit l'origine, les valeurs de μ et de ν que nous avons écrites en commençant, d'où l'on tire comme ci-dessus les équations de condition telles que les équations (6) et (14) : mais les expressions de s ne servent à rien, puisque les valeurs de R sont infinies.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k+11$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que je veux donner ici consiste en ce que pour tout nombre premier m de la forme $24k+11$, on peut écrire au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

dans laquelle x et y sont des entiers positifs, le premier pair, le second impair, et où p désigne un nombre premier de la forme $12\mu+7$, qui ne divise pas y: on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du nombre premier donné m, de la forme $24k+11$, on retranche les carrés pairs de grandeur moindre, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'une décomposition exprimée par

$$p^{4l+1} y^2,$$

p étant un nombre premier $12\mu+7$, et y un entier non divisible par p. Mais j'observe qu'il est inutile de retrancher de m les carrés multiples de 3; car les formes linéaires assignées à m et à p dans notre équation

$$m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

ne permettent pas que x (ni y) soit divisible par 3. Les carrés à employer sont donc seulement 4, 16, 64, 100, 196,...; on laissera de côté 36, 114, etc.

Le nombre premier le plus simple que la formule

$$24k+11$$

puisse nous offrir est 11. Or on a

$$11 = 2^2 + 7.1^2,$$

et 7 est compris dans la forme $12\mu + 7$, où l'on peut prendre $\mu = 0$.

En posant $k = 2$, nous aurons

$$m = 59;$$

d'où, en retranchant 4 et 16, les deux restes 55 et 43. Il est clair que 55, ou 5.11, n'est pas de la forme $p^{4l+1} y^2$. Mais on a la solution

$$59 = 4^2 + 43.1^2,$$

où 43, c'est-à-dire $3.12 + 7$ est un nombre premier de la forme voulue $12\mu + 7$. Ainsi notre théorème est vérifié. En retranchant 36, on aurait eu pour reste 23 ; c'est un nombre premier, mais non pas de la forme $12\mu + 7$.

Soit enfin $k = 3$, d'où résulte encore un nombre premier

$$m = 83.$$

En retranchant de 83 successivement 4, 16, 64, on aura les restes 79, 67, 19 qui sont tous les trois des nombres premiers de la forme $12\mu + 7$: on a donc ici trois décompositions canoniques

$$83 = 2^2 + 79.1^2,$$
$$83 = 4^2 + 67.1^2,$$
$$83 = 8^2 + 19.1^2,$$

en sorte que dans cet exemple, comme dans ceux qui précedent, notre théorème se trouve exact.

THÉORÈME

CONCERNANT LA FONCTION NUMÉRIQUE RELATIVE AU NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS D'UN ENTIER SOUS LA FORME D'UNE SOMME DE TROIS CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit $\psi(\mu)$ le nombre des représentations d'un entier donné μ par une somme de trois carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$\mu = x^2 + y^2 + z^2,$$

où x, y, z sont indifféremment positifs, nuls ou négatifs. On a

$$\psi(1) = 6, \quad \psi(2) = 12, \quad \psi(3) = 8, \quad \psi(4) = 6, \ldots,$$

et nous conviendrons en outre de faire

$$\psi(0) = 1.$$

La fonction $\psi(\mu)$ jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses dont j'aurai plus tard à m'occuper longuement. Celle que je vais indiquer me paraît digne de quelque attention quand on la prend dans toute sa généralité.

Soit n un nombre pair quelconque, en sorte que l'on ait

$$n = 2^\alpha m,$$

α étant > 0 et m impair. Désignons par A, B, C trois constantes arbitraires et par s un entier auquel nous donnerons les valeurs successives

$$s = 0, \quad s = \pm 1, \quad s = \pm 2, \quad s = \pm 3, \ldots, \quad s = \pm \omega,$$

ω étant le plus grand entier contenu dans $\sqrt{n}$, en sorte que $\omega = \sqrt{n}$ quand n est un carré. C'est à cet entier variable s que se rapporte la

somme

$$\sum (As^4 + Bs^2 + C)\,\psi(n - s^2),$$

que je désignerai par U. On peut avoir quelquefois $n - s^2 = 0$, d'après ce qui vient d'être dit, et c'est pour cela que nous avons fixé la valeur de $\psi(0)$ en convenant de prendre $\psi(0) = 1$.

Cela posé, je trouve pour U cette expression très-simple

$$U = (3An^2 + 6Bn + 24C)\int m,$$

où $\int m$ désigne, d'après une notation d'Euler, la somme des diviseurs de m.

Les constantes arbitraires A, B, C peuvent changer avec n. Rien n'empêche, par exemple, de faire

$$3An^2 + 6Bn + 24C = 0:$$

alors on a

$$U = 0.$$

Une seule application suffira. Soit $n = 2$, d'où $m = 1$, $\int m = 1$. Notre formule donne

$$U = 12A + 12B + 24C;$$

et c'est bien ce qu'on tire du calcul direct, en observant que les valeurs de s à employer ici sont $0, 1$ et -1, de manière que C se présente avec le facteur

$$\psi(2) + 2\psi(1),$$

qui est égal à 24, tandis que A et B n'ont que le facteur

$$2\psi(1),$$

qui est égal à 12.

NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS DU DOUBLE
D'UN ENTIER IMPAIR SOUS LA FORME D'UNE SOMME DE DOUZE CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le nombre N des représentations du double $2m$ d'un entier impair donné m par une somme de douze carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sont des entiers positifs ou négatifs, ou zéro, s'exprime très-simplement au moyen de la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m.

Désignons en effet par $\zeta_5(m)$ la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m, 1 et m compris. Je trouve que l'on a

$$N = 264\zeta_5(m).$$

Le facteur 264 se rapporte au cas de $m = 1$: c'est le nombre des représentations de 2 par une somme de douze carrés. Et en effet ici tout se tire de la seule équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en y permutant les carrés; d'où

$$N = 4 \times \frac{12.11}{2} = 264.$$

Soit en second lieu $m = 3$. On partira des deux équations

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2,$$

dont les seconds membres devront d'abord être complétés par des

zéros pour parfaire le nombre 12, après quoi on effectuera les permutations convenables. Il vient ainsi

$$N = 264\,(20 + 224),$$

c'est-à-dire

$$N = 264 \times 244,$$

ce qui s'accorde avec notre formule, attendu que

$$\zeta_5(3) = 1^5 + 3^5 = 244.$$

Soit enfin $m = 5$. En partant des équations fondamentales

$$10 = 1 + 9, \quad 10 = 1 + 1 + 4 + 4,$$

puis

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4,$$

et

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

introduisant le double signe des racines des carrés, ajoutant les zéros voulus, et permutant, on trouvera

$$N = 3.8.11\,(2 + 180 + 2688 + 256),$$

d'où

$$N = 264 \times 3126 = 264\,(1 + 5^5),$$

comme notre formule le dit.

Je ne sache pas que personne ait jusqu'ici donné cette formule. Il est inutile d'avertir que nous l'avons conclue sans aucune difficulté de nos *formules générales*.

En calculant N, nous avons tenu compte de toutes les solutions entières de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2.$$

Mais si l'on voulait s'en tenir aux solutions *propres*, c'est-à-dire exclure les solutions où $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ ont un facteur commun plus grand que l'unité, on obtiendrait un autre nombre M facile au reste à déduire de N. Pour en donner la valeur, je décompose m en ses facteurs

premiers de manière à avoir

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma}.$$

Cela fait, M s'exprime par le produit

$$264\left[a^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}\right]\left[b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}\right]\ldots\left[c^{5\gamma} + c^{5(\gamma-1)}\right].$$

Le coefficient numérique est le même que ci-dessus; mais la fonction $\zeta_5(m)$ est remplacée par une autre fonction qui ne coïncide avec $\zeta_5(m)$ que quand les exposants α, β,..., γ sont tous égaux à 1.

Soit, comme exemple,

$$m = 9.$$

Il viendra

$$\text{M} = 264\,(9^5 + 3^5),$$

tandis que

$$\text{N} = 264\,(9^5 + 3^5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les solutions de l'équation

$$2.9 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2$$

où x_1, x_2,..., x_{12} sont divisibles par 3, solutions dont le nombre est évidemment celui des représentations de 2, c'est-à-dire 244.

La fonction numérique

$$\left[2^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}\right]\left[b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}\right]\ldots,$$

dont nous venons de faire usage, est liée à $\zeta_5(m)$ comme la fonction

$$(a^{\alpha} + a^{\alpha-1})(b^{\beta} + b^{\beta-1})\ldots,$$

employée par Eisenstein dans l'expression du nombre des représentations propres de l'entier m par une somme de quatre carrés, est liée à $\zeta_1(m)$, c'est-à-dire à la somme des diviseurs de m.

En général la fonction

$$\left[a^{n\alpha} + a^{n(\alpha-1)}\right]\left[b^{n\beta} + b^{n(\beta-1)}\right]\ldots.$$

que je désignerai par $Z_n(m)$ est liée de même à $\zeta_n(m)$, c'est-à-dire à la somme des puissances de degré n des diviseurs de m. Cette fonction jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses que je me propose de développer dans un autre article. Observons seulement ici qu'en représentant par D^2 les diviseurs carrés de m, c'est-à-dire en représentant par D ceux des diviseurs de m dont le carré divise aussi m, en sorte que

$$\frac{m}{D^2}$$

soit un entier, on a

$$\sum Z_n\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta_n(m),$$

équation que l'on pourrait prendre comme définition de la fonction $Z_n(m)$ dont elle fournirait la valeur telle qu'on l'a écrite plus haut. Le signe sommatoire porte, bien entendu, sur les valeurs de D : l'unité est toujours une de ces valeurs.

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Que tout nombre entier n puisse être exprimé par la forme

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

en prenant pour x, y, z, t des entiers, c'est ce qu'on peut établir, comme j'ai déjà l'occasion de le dire [*], par la méthode même que Lagrange a suivie pour la décomposition d'un nombre en quatre carrés. Mais je veux ici aller plus loin et fixer avec précision le nombre des représentations de tout entier donné n sous la forme indiquée, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où les entiers x, y, z, t peuvent être indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Je distinguerai deux cas, suivant que n est un entier impair ou bien est de la forme $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 0$.

Dans le premier cas, celui où n est un nombre impair, le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

s'obtient très-simplement; c'est le quadruple de la somme des diviseurs de n, ceux que 3 divise exceptés.

Ainsi pour $n = 1$, on a $N = 4$, et c'est ce que l'on voit *a priori* en

[*] *Voir* tome I (2e série), page 230.

observant que

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Pour $n = 3$, les diviseurs de n sont 1 et 3, mais le diviseur 3 doit être exclu. Il vient donc encore $N = 4$. Et c'est bien ce que montre l'équation double

$$3 = 0^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2] = 0^2 + 0^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2].$$

Soit encore $n = 5$. On aura $N = 24$. Les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[0 + (\pm 1)^2] = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2]$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2) = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2),$$

confirment ce fait.

Quand on a

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et $\alpha > 0$, la règle pour trouver le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

est un peu plus compliquée. Il faut alors opérer sur le facteur impair m comme tout à l'heure sur n, c'est-à-dire chercher la somme des diviseurs de m, ceux que 3 divise exceptés. Soit S cette somme. Je trouve pour N la valeur générale que voici :

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S.$$

Pour $\alpha = 1$, $n = 2m$, on a donc

$$N = 4S;$$

pour $\alpha = 2$, $n = 4m$, on a

$$N = 20S;$$

pour $\alpha = 3$, $n = 8m$, on a

$$N = 52S;$$

pour $\alpha = 4$, $n = 16m$, on a

$$N = 116S;$$

pour $\alpha = 5$, $n = 32m$, on a

$$N = 244S;$$

et ainsi de suite.

Ajoutons quelques exemples, et d'abord soit $n = 2$, d'où $\alpha = 1$, $m = 1$, $S = 1$, $N = 4$: cela s'accorde avec l'équation

$$2 = (\pm 1^2) + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $n = 10$, d'où $\alpha = 1$, $m = 5$, $S = 6$. On en conclura $N = 24$; or c'est bien ce qui résulte des expressions ci-après du nombre 10 :

$$(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 3(0^2 + 0^2), \quad (\pm 2)^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$
$$(\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2), \quad 0^2 + (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1^2) + (\pm 1)^2].$$

Soit encore $n = 4$, d'où $\alpha = 2$, $m = 1$. Il viendra $N = 20$, comme le donnent effectivement les expressions suivantes du nombre 4 :

$$(\pm 2)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2), \qquad 0^2 + (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2),$$
$$(\pm 1)^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2], \qquad (\pm 1)^2 + 0^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2],$$
$$0^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2], \qquad 0^2 + (\pm 1)^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2].$$

Enfin soit $n = 120$. En observant que 120 est le produit de 8 par 15, on verra que, pour ce nombre 120, on a $\alpha = 3$, $m = 15$: les diviseurs de 15 étant 1, 3, 5, 15, après avoir exclu 3 et 15 que 3 divise, on obtiendra $S = 6$; d'où finalement

$$N = 52 \times 6 = 312.$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier ce résultat par le calcul direct.

La formule

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S$$

qui fournit le nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

quand $\alpha > 0$, ne convient pas au cas de $\alpha = 0$. On aurait une formule générale en posant

$$N = 4\left[2^{\alpha+1} - 2 - (-1)^{2^{\alpha}}\right] S,$$

ou bien encore

$$N = 4\left[2^{\alpha+1} - 2 - \cos(2^{\alpha}\pi)\right] S.$$

Mais il est plus simple de considérer séparément les nombres impairs et les nombres pairs.

Jusqu'ici nous avons admis tout à la fois et les solutions propres et les solutions impropres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Excluons maintenant les solutions *impropres* où x, y, z, t ont un facteur commun > 1, et cherchons le nombre M des solutions *propres*. A cet effet, mettons en évidence les nombres premiers qui peuvent entrer dans la composition de n, et posons

$$n = 2^{\alpha}.3^{\beta}.a^{\mu}.b^{\nu}\ldots c^{\omega},$$

où α et β peuvent se réduire à zéro. Nous séparons 2 et 3 des autres nombres premiers a, b,..., c. Ils jouent en effet un rôle particulier.

J'observe d'abord que quand on a

$$\beta \geqq 2,$$

il vient

$$M = 0;$$

car alors x, y, z, t ont nécessairement le diviseur 3.

Restent les valeurs

$$\beta = 0, \quad \beta = 1,$$

répondant aux deux formes

$$2^\alpha a^\mu b^\nu \ldots c^\omega, \quad 2^\alpha . 3 . a^\mu b^\nu \ldots c^\omega.$$

Or il est aisé de voir que pour les deux nombres qu'elles donnent en prenant pour α, a, μ, etc., les mêmes valeurs, la valeur de M est aussi la même. Désormais donc nous supposerons $\beta = 0$, partant n premier à 3, ou

$$n = 2^\alpha a^\mu b^\nu \ldots c^\omega.$$

Cela étant, M dépendra du produit

$$(a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1}) \ldots (c^\omega + c^{\omega-1}),$$

que je désignerai par R, et de l'exposant α.

Pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour n impair et pour n simplement pair, on aura

$$M = 4R.$$

Pour $\alpha = 2$, on aura

$$M = 16R.$$

Enfin pour $\alpha > 2$, on trouve généralement

$$M = 3.2^{\alpha+1} R.$$

Soit, comme exemple,

$$n = 5^2 :$$

il viendra

$$M = 4(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 4(5^2 + 5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les quatre solutions contenues dans la double égalité

$$5^2 = (\pm 5)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 5)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite

$$n = 4.5^2 :$$

il viendra

$$M = 16(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 20(5^2 + 5 + 1).$$

Or les solutions perdues ici sont d'abord celles où x, y, z, t sont divisibles par 2 sans l'être par 5; leur nombre est celui des solutions propres de l'équation

$$5^2 = x'^2 + y'^2 + 3(z'^2 + t'^2):$$

nous venons de le trouver égal à $4(5^2 + 5)$. En outre on perd les solutions où x, y, z, t ont le facteur 5, le facteur 2 restant possible sans être nécessaire : leur nombre est celui des solutions propres ou impropres de l'équation

$$4 = x''^2 + y''^2 + 3(z''^2 + t''^2),$$

c'est-à-dire 20. C'est bien là ce que disent nos formules.

MÉMOIRE

SUR

L'EMPLOI D'UN NOUVEAU SYSTÈME DE VARIABLES

DANS

L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES SURFACES COURBES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

Dans l'analyse appliquée à la géométrie, on définit, en général, une surface par une équation entre les trois coordonnées rectangles de ses différents points; toutefois il est presque évident à priori qu'il y aurait de grands avantages à substituer aux coordonnées trois autres variables liées d'une manière plus intime à la forme de la surface. Je me propose, dans ce Mémoire, d'exposer une théorie complète des surfaces *courbes* (non développables) fondée sur la considération des variables qui servent à fixer la position du plan tangent. Mon travail se compose de deux parties : la première contient les formules générales relatives aux lignes géodésiques, aux lignes de courbure, aux rayons de courbure des sections normales, etc., et plusieurs applications simples, qui déjà mettent en évidence l'utilité de ces formules. La seconde partie est consacrée à la recherche de certaines classes de surfaces parmi lesquelles je citerai les surfaces dont un des rayons de courbure principaux est constant, les surfaces d'étendue minimum, les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. La plupart de ces surfaces ont été étudiées par Monge, mais l'emploi des formules établies dans la première partie facilite d'une manière remarquable les intégrations et l'interprétation géométrique des résultats obtenus.

Soit une surface S rapportée à trois axes rectangulaires, et considérons un de ses points M ayant ξ, η, ζ pour coordonnées. Si nous appelons α, β, γ les angles que la normale MN, menée à la surface S par le point M, fait avec les parties positives des axes, et δ la distance de l'ori-

gine au plan tangent, nous aurons pour l'équation de ce dernier plan

$$(1)\qquad X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \delta,$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes. Dans cette équation, il entre quatre variables $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, δ, mais les trois premières sont liées, comme on sait, par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On laisse cette condition de côté en posant

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\varphi,\quad \cos\beta = \sin\theta\sin\varphi,\quad \cos\gamma = \cos\theta,$$

ce qui donne pour l'équation (1)

$$(2)\qquad X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta = \delta,$$

et alors considérant δ comme une fonction de θ et de φ, on a l'équation générale des plans tangents à une surface déterminée quelconque. A la place de θ, φ, δ, on peut prendre trois autres variables liées d'une manière quelconque aux premières; voici le choix qui m'a semblé devoir conduire aux résultats les plus simples. Je conserve φ que j'appelle x, puis je pose

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = dy,\quad \text{ou}\quad \tang\tfrac{1}{2}\theta = e^y,$$

ce qui donne

$$\sin\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2e^y}{1+e^{2y}} = \frac{1}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}} = \frac{1}{\cos iy},$$

$$\cos\theta = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} = \frac{i\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}}{\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}} = i\tang iy,$$

i étant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; enfin je désigne par $-z$ l'expression $\frac{\delta}{\sin\theta} = \delta\cos iy$; de cette manière l'équation (2) se change en celle-ci

$$(3)\qquad X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z,$$

dans laquelle je considère z comme une fonction connue de x et de y.

Il ne sera pas inutile d'observer, avant d'aller plus loin, que x représente l'angle du plan mené par la normale MN parallèlement à l'axe des ζ avec le plan des (ξ, ζ); que y est le logarithme-tangente de la moitié de l'angle formé par la normale avec l'axe des ζ, et enfin que z est la distance de l'origine à la trace du plan tangent sur le plan des (ξ, η). De là il résulte que les points de la surface S pour lesquels x est constant, sont tels, que la normale en ces points est parallèle à un même plan conduit par l'axe des ζ, et que les points pour lesquels y est constant sont tels, que la normale en ces points fait le même angle avec l'axe des ζ. Nous donnerons, pour cette raison, à nos lignes coordonnées $x =$ constante, $y =$ constante, le nom de méridiens et de parallèles. Ajoutons encore que si, à l'exemple de Gauss, on rapporte les différents points de la surface S sur une sphère de rayon 1, en menant des rayons respectivement parallèles aux normales de la surface, l'équation en x et y qui définira une courbe quelconque tracée sur la surface, conviendra aussi à la transformée sphérique de cette courbe, pourvu que l'on considère x et y comme les variables dont je me suis servi au commencement de mon Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, variables qui représentent la longitude et le logarithme-tangente du demi-complément de la latitude.

Montrons maintenant comment, de l'équation (3), qui définit tous les plans tangents à la surface considérée, on peut déduire les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de cette surface. Pour cela, observons qu'un point de la surface se trouve non-seulement dans le plan tangent mené par ce point, mais encore dans tous les plans tangents menés par les points infiniment voisins; donc ξ, η, ζ substitués respectivement à X, Y, Z doivent vérifier l'équation (3) et cette équation différentiée, soit par rapport à x, soit par rapport à y, en laissant X, Y, Z constants. Ainsi, si l'on pose

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

on a

$$\xi \cos x + \eta \sin x + \zeta i \sin i y = -z,$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = p,$$

$$\zeta \cos i y = q$$

Telles sont les équations qui déterminent les coordonnées ξ, η, ζ ; nous les mettrons le plus souvent sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \xi\cos x + \eta\sin x = -z - i\,\mathrm{tang}\,iy.q, \\ \xi\sin x - \eta\cos x = p, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy}, \end{cases}$$

et quelquefois sous celle-ci

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} r\cos(x-\omega) = -z - i\,\mathrm{tang}\,iy.q, \\ r\sin(x-\omega) = p, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy}, \end{cases}$$

en substituant les coordonnées polaires r et ω aux coordonnées rectangulaires ξ et η.

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DES SURFACES COURBES.

Les formules que l'on rencontre dans la théorie des surfaces peuvent être classées en deux catégories bien distinctes : celles de la première catégorie se rapportent aux éléments qui restent les mêmes lorsque l'on déforme la surface sans en changer l'étendue, telles sont les formules relatives aux longueurs des lignes qu'on peut tracer sur la surface, aux angles que font ces lignes, aux aires comprises entre ces lignes et enfin aux courbures que M. Liouville a appelées géodésiques; les formules de la seconde catégorie se rapportent aux éléments qui dépendent au contraire de la forme de la surface. Nous allons d'abord nous occuper des formules de la première catégorie.

I.

Évaluons l'élément linéaire de la surface, c'est-à-dire la distance ds de deux points infiniment voisins répondant aux valeurs x, y ; $x+dx$, $y+dy$ des variables indépendantes x et y. Si nous différentions les équations (4) en faisant varier x, y, ξ, η, ζ, il vient, après réduc-

tions,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} d\xi\cos x + d\eta\sin x &= -\,i\,\mathrm{tang}\,iy\,[s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy],\\ d\xi\sin x - d\eta\cos x &= (r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z)\,dx + s\,dy,\\ d\zeta &= \frac{1}{\cos iy}[s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy],\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r,\qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s,\qquad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

Faisant la somme des carrés membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & [(r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z)\,dx + s\,dy]^2\\ & + [s\,dx + (t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q)\,dy]^2\end{aligned}$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 &= (u\,dx + v\,dy)^2 + (v\,dx + w\,dy)^2\\ &= (u^2 + v^2)\,dx^2 + 2v(u + w)\,dx\,dy + (v^2 + w^2)\,dy^2,\end{aligned}\right.$$

en posant

$$r + i\,\mathrm{tang}\,iy.q + z = u,\quad s = v,\quad t + i\,\mathrm{tang}\,iy.q = w.$$

II.

Les quantités u, v, w doivent jouer dans la suite un très-grand rôle; nous ferons dès à présent remarquer deux de leurs propriétés. On a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \frac{dv}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy.w,\\ \frac{dw}{dx} &= \frac{dv}{dy} + i\,\mathrm{tang}\,iy.v;\end{aligned}\right.$$

puis, en se rappelant la troisième des équations (4),

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} v &= \cos iy\cdot\frac{d\zeta}{dx},\\ w &= \cos iy\cdot\frac{d\zeta}{dy},\\ u &= \int\left(\cos iy\cdot\frac{d^2\zeta}{dx^2} + i\sin iy\cdot\frac{d\zeta}{dy}\right)dy\end{aligned}\right.$$

III.

Les équations (7) sont caractéristiques, je veux dire que trois fonctions de x et de y qui, prises pour u, v, w, vérifient les équations (7), peuvent toujours être considérées comme se rapportant à une et à une seule surface. Pour le démontrer, je vais faire voir que si l'on se donne trois fonctions u, v, w satisfaisant aux équations (7), il sera possible de trouver une fonction z telle, que l'on ait

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy} + z = u,$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = v,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + i \operatorname{tang} iy \cdot \frac{dz}{dy} = w.$$

En effet, les deux dernières équations reviennent à

$$\frac{d\,\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}}{dx} = \frac{v}{\cos iy}, \qquad \frac{d\,\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}}{dy} = \frac{w}{\cos iy};$$

donc, si z existe, $\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}$ devra avoir pour différentielle totale $\dfrac{v\,dx + w\,dy}{\cos iy}$.

Cette propriété détermine à une constante près la valeur de $\dfrac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy}$, et cette valeur existe toujours, car, à cause de la seconde des équations (7), on a

$$\frac{d\,\dfrac{v}{\cos iy}}{dy} = \frac{d\,\dfrac{w}{\cos iy}}{dx}.$$

Posons donc

$$\frac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy} = \zeta + C.$$

nous déduirons de là

$$z = \int_0^y \zeta \cos iy\, dy - Ci \sin iy + X.$$

X étant une fonction arbitraire de x; il faudra maintenant que X puisse être déterminée par la condition

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy + \int_0^y \zeta \cos iy\, dy + i \sin iy\,.\,\zeta + X'' + X = u,$$

ce qui exige que l'expression

$$u - \int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy - \int_0^y \zeta \cos iy\, dy - i \sin iy\,.\,\zeta$$

ne contienne que x, c'est-à-dire ait zéro pour dérivée relative à y; or on reconnaît que cela a lieu en vertu de la première des équations (7), en remarquant que

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos iy}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = \frac{w}{\cos iy}.$$

Ainsi X existe, et sa valeur générale est d'ailleurs de la forme

$$X_1 - C' \cos x - C'' \sin x,$$

C′ et C″ étant des constantes arbitraires; donc z existe aussi et a pour valeur générale

$$z_1 - Ci \sin iy - C' \cos x - C'' \sin x.$$

z étant connu, on n'a qu'à substituer sa valeur dans les équations (4) pour obtenir les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ des différents points de la surface. On remarquera sans peine que, quoique la valeur générale de z renferme trois constantes arbitraires, il n'y a cependant qu'une surface qui satisfasse à la question, car en portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont C′, C″, C, on fait disparaître ces trois constantes.

IV.

Reprenons le carré de l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = (u^2 + v^2)\,dx^2 + 2v(u + w)\,dx\,dy + (v^2 + w^2)\,dy^2.$$

On en déduit immédiatement (voyez *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss)

$$dx\sqrt{u^2 + v^2}, \quad dy\sqrt{v^2 + w^2}$$

pour les éléments des lignes coordonnées $y =$ constante, $x =$ constante; puis en appelant ω l'angle que ces lignes font entre elles

(9) $$\cos\omega = \frac{v(u + w)}{\sqrt{(u^2 + v^2)(v^2 + w^2)}},$$

par suite

(9) $$\left\{\begin{aligned} \sin\omega &= \frac{uw - v^2}{\sqrt{(u^2 + v^2)(v^2 + w^2)}},\\ \tan\omega &= \frac{uw - v^2}{v(u + w)}. \end{aligned}\right.$$

De là résulte que l'élément dA de la surface, compris entre quatre lignes coordonnées infiniment voisines, est

(10) $$dA = (uw - v^2)\,dx\,dy,$$

formule très-simple et débarrassée de radicaux qui rend commode dans le problème de la quadrature des surfaces l'emploi des variables x et y.

On peut observer, en passant, que $\cos\omega$ ne devient nul que pour $v = 0$ ou bien pour $u + w = 0$, Or, comme on le verra plus bas, la condition $v = 0$ convient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont dans des plans parallèles; la condition

$$u + w = 0$$

définit les surfaces d'étendue minimum. Ce n'est donc que pour les

deux classes de surfaces dont nous venons de parler que les méridiens et les parallèles peuvent se couper à angle droit.

V.

Soit maintenant

$$mdx + ndy = 0$$

l'équation différentielle d'une ligne quelconque tracée sur la surface S, et appelons φ l'angle que cette ligne fait avec les méridiens $x =$ constante ; nous aurons

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \omega)} = \frac{n\sqrt{u^2 + v^2}}{m\sqrt{v^2 + w^2}},$$

ou

$$\frac{(v^2 + w^2)\sin\varphi}{v(u + w)\sin\varphi - (uw - v^2)\cos\varphi} = \frac{n}{m},$$

d'où

$$\tang\varphi = \frac{n(uw - v^2)}{nv(u + w) - m(v^2 + w^2)}.$$

VI.

Appliquons, en particulier, le résultat précédent aux lignes

$$udx + vdy = 0$$

et

$$vdx + wdy = 0.$$

Nous trouvons pour la première

$$\tang\varphi_1 = -\frac{v}{w},$$

et pour la seconde

$$\tang\varphi_2 = \frac{w}{v}.$$

On conclut de là que les lignes

$$udx + vdy = 0, \quad vdx + wdy = 0$$

forment deux systèmes orthogonaux ; mais l'équation

$$v\,dx + w\,dy = 0,$$

en remplaçant v et w par les valeurs que fournissent les équations (8), se réduit à

$$\frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy = 0$$

ou

$$\zeta = \text{constante};$$

donc les courbes

$$v\,dx + w\,dy = 0$$

sont les lignes de niveau de la surface par rapport au plan des (ξ, η); par conséquent, les courbes

$$u\,dx + v\,dy = 0$$

sont les lignes de plus grande pente par rapport au même plan des (ξ, η).

VII.

Nous substituerons, dans la suite, à l'angle φ qu'une ligne fait avec les méridiens $x =$ constante, l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente, $u\,dx + v\,dy = 0$. Les lignes trigonométriques de ce nouvel angle sont d'ailleurs faciles à obtenir. En effet, on a

$$\theta = \varphi - \varphi_1,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi_1}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1},$$

et en remplaçant $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi_1$ par leurs valeurs

(11) $$\operatorname{tang}\theta = \frac{un - vm}{vn - wm},$$

d'où l'on tire

(12) $$\left\{\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{un - vm}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}}, \\ \cos\theta &= \frac{vn - wm}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}}. \end{aligned}\right.$$

On peut mettre ces résultats sous une autre forme : appelons ds l'arc de la courbe considérée, compris entre le point (x, y) et le point infiniment voisin $(x + dx, y + dy)$, nous aurons

$$\frac{dx}{n} = \frac{dy}{-m} = \frac{ds}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}},$$

d'où

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}\theta &= \frac{u\,dx + v\,dy}{v\,dx + w\,dy}, \\ \sin\theta &= u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds}; \\ \cos\theta &= v\frac{dx}{ds} + w\frac{dy}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Remarquons encore les formules

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{w\sin\theta - v\cos\theta}, \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{w\sin\theta - v\cos\theta}{uw - v^2}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{uw - v^2}. \end{aligned} \right.$$

qui se déduisent sans peine des précédentes.

VIII.

Afin de montrer immédiatement par une application simple l'utilité des formules précédentes, cherchons les trajectoires orthogonales d'une série de lignes tracées sur la surface S. Soit

$$m\,dx + n\,dy = 0$$

l'équation différentielle sans constante arbitraire qui représente toutes les lignes considérées; la première des équations (11) donne

$$\frac{un - vm}{vn - wm}$$

pour la tangente de l'angle que les lignes données font avec les lignes

de plus grande pente, puis la première des équations (12) montre que

$$\frac{u\,dx + v\,dy}{v\,dx + w\,dy}$$

représente la tangente de l'angle sous lequel les lignes cherchées coupent les mêmes lignes de plus grande pente. Or le produit de ces deux tangentes doit être égal à -1; on a donc

$$(un - vm)(u\,dx + v\,dy) + (vn - wm)(v\,dx + w\,dy) = 0$$

pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

Si les lignes considérées, au lieu d'être définies par leur équation différentielle, étaient données par l'angle θ sous lequel ces lignes coupent les lignes de plus grande pente, on trouverait d'une manière analogue que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\sin\theta\,(u\,dx + v\,dy) + \cos\theta\,(v\,dx + w\,dy) = 0$$

ou bien

$$(14)\qquad (u\sin\theta + v\cos\theta)\,dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)\,dy = 0$$

IX.

Je vais maintenant m'occuper de la courbure géodésique; et d'abord j'établirai une formule importante qui fait connaître cette courbure dans le cas général où les lignes coordonnées sont tout à fait quelconques.

Soient u et v les deux variables indépendantes au moyen desquelles on fixe la position des différents points de la surface, et supposons l'élément linéaire ds de la surface déterminé par l'égalité

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Considérons deux séries de lignes orthogonales représentées respectivement par les équations

$$\alpha = \text{constante},\quad \beta = \text{constante}.$$

Posons

$$d\alpha = m\,du + n\,dv, \quad d\beta = p\,du + q\,dv.$$

nous aurons, k étant un certain facteur,

$$\frac{1}{k}(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m) = p, \quad \frac{1}{k}(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m) = q,$$

d'où

$$\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2 = \frac{k^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}(\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2).$$

Or s et t étant les arcs des courbes $\alpha =$ constante, $\beta =$ constante, on a, d'après une formule connue (*voyez* mon Mémoire sur la théorie générale des surfaces, XXXIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) pour la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_\alpha}$ des courbes $\alpha =$ constante,

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{d_\alpha d_\beta s}{d_\beta s . d_\alpha t},$$

où la caractéristique d_α indique les différentielles prises en laissant β constant et en faisant varier α de $d\alpha$, et la caractéristique d_β les différentielles prises en laissant α constant et faisant varier β de $d\beta$; mais

$$d_\beta s = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\beta}{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}}, \quad d_\alpha t = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}};$$

donc

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}{(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\,d\alpha}\, d_\alpha . \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}{k\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\alpha}\, d_\alpha . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}.$$

D'ailleurs

$$d_\alpha . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}} = \frac{d . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du}\, d_\alpha u + \frac{d . \frac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv}\, d_\alpha v.$$

puis

$$m d_\alpha u + n d_\alpha v = d\alpha,$$

$$p d_\alpha u + q d_\alpha v = 0,$$

d'où

$$d_\alpha u = \frac{-q\,d\alpha}{np - mq} = \frac{-(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m)\,d\alpha}{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2},$$

$$d_\alpha v = \frac{p\,d\alpha}{np - mq} = \frac{(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m)\,d\alpha}{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2};$$

on a donc encore

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \left(\frac{\mathrm{E}n - \mathrm{F}m}{k} \frac{d \cdot \dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv} - \frac{\mathrm{F}n - \mathrm{G}m}{k} \frac{d \cdot \dfrac{k}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du} \right)$$

ou bien enfin

$$(15) \quad \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \left[\frac{d \cdot \dfrac{\mathrm{E}n - \mathrm{F}m}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{dv} - \frac{d \cdot \dfrac{\mathrm{F}n - \mathrm{G}m}{\sqrt{\mathrm{E}n^2 - 2\mathrm{F}mn + \mathrm{G}m^2}}}{du} \right],$$

en observant que

$$\frac{d \cdot \frac{1}{k}(\mathrm{E}n - \mathrm{F}m)}{dv} = \frac{d \cdot \frac{1}{k}(\mathrm{F}n - \mathrm{G}m)}{du}.$$

X.

Dans le système de variables que nous employons, la formule (15) devient, en reprenant nos anciennes notations,

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{uw - v^2} \left(\frac{d \cdot \dfrac{(u^2 + v^2)n - v(u + w)m}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}}}{dy} - \frac{d \cdot \dfrac{v(u + w)n - (v^2 + w^2)m}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}}}{dx} \right).$$

Or ds étant, comme plus haut, l'arc de la courbe compris entre le point (x, y) et le point infiniment voisin $(x + dx, y + dy)$, nous avons trouvé

$$\frac{dx}{ds} = \frac{n}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{-m}{\sqrt{(u^2 + v^2)n^2 - 2v(u + w)mn + (v^2 + w^2)m^2}};$$

donc on a

$$\frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{uw - v^2}\left\{\begin{array}{c} \dfrac{d\cdot\left[(u^2 + v^2)\dfrac{dx}{ds} + v(u + w)\dfrac{dy}{ds}\right]}{dy} \\ - \dfrac{d\cdot\left[v(u + w)\dfrac{dx}{ds} + (v^2 + w^2)\dfrac{dy}{ds}\right]}{dx} \end{array}\right\},$$

ou, à cause des formules (12),

$$\frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{uw - v^2}\left[\frac{d(u\sin\theta + v\cos\theta)}{dy} - \frac{d(v\sin\theta + w\cos\theta)}{dx}\right],$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{uw - v^2}\left\{\begin{array}{c} \left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)\sin\theta + \left(\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dx}\right)\cos\theta \\ + (u\cos\theta - v\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\dfrac{d\theta}{dx} \end{array}\right\},$$

et, en se rappelant les formules (7) et (13),

$$(16) \qquad \frac{ds}{\rho_\gamma} = i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx + d\theta,$$

résultat d'une simplicité remarquable.

XI.

La formule (16) conduit immédiatement à plusieurs conséquences curieuses. On voit que si deux des trois quantités $\frac{1}{\rho_\gamma}$, dx, $d\theta$ sont sup-

posées nulles, la troisième le sera nécessairement. On a donc les trois théorèmes suivants :

Si une ligne géodésique tracée sur la surface S est en même temps ligne méridienne, elle coupera sous un angle constant les lignes de niveau.

Si une ligne géodésique tracée sur la surface S coupe sous un angle constant les lignes de niveau, elle sera en même temps ligne méridienne.

Si une ligne méridienne tracée sur la surface S coupe sous un angle constant les lignes de niveau, elle sera en même temps ligne géodésique.

Ceci posé, cherchons l'équation générale des surfaces sur lesquelles on peut tracer une série de lignes qui jouissent à la fois des trois propriétés d'être lignes géodésiques, d'être lignes méridiennes et de couper sous un angle constant les lignes de niveau. Si nous appelons θ l'angle sous lequel les lignes dont il s'agit coupent les lignes de plus grande pente, θ sera une fonction de x, et en même temps on aura

$$\tang\theta = \frac{v}{w} = \frac{\frac{d\zeta}{dx}}{\frac{d\zeta}{dy}},$$

donc on pourra poser

$$\frac{d\zeta}{dy} - \varphi(x)\frac{d\zeta}{dx} = 0,$$

d'où

$$\zeta = F(y + X),$$

X étant une fonction de x; par suite, d'après la troisième des équations (4)

$$z = \int \cos i y \, F(y + X)\, dy + X_1,$$

X_1 étant une nouvelle fonction de x. z étant connu en fonction de x et de y, la surface est déterminée.

XII.

Les lignes géodésiques sont celles dont la courbure géodésique est

nulle : on a donc pour ces lignes l'équation

(17) $$i \tang iy\, dx + d\theta = 0,$$

à laquelle il faut joindre celle-ci

(13) $$(u\cos\theta - v\sin\theta)\,dx - (w\sin\theta - v\cos\theta)\,dy = 0,$$

qui a lieu pour toutes les lignes tracées sur la surface S. Les équations (17) et (13) paraissent devoir jouer un grand rôle dans la théorie importante des lignes géodésiques; c'est ce que je vais essayer de montrer, en appliquant ces équations à la solution de plusieurs questions de nature différente.

1°. On déduit d'abord des équations (17) et (13) un cas d'intégrabilité qui n'a pas, je crois, encore été remarqué. Supposons que les trois fonctions u, v, w ne dépendent que de y; éliminant dx entre les deux équations (17) et (13), nous aurons la suivante

$$(u\cos\theta - v\sin\theta)\,d\theta + i \tang iy\,(w\sin\theta - v\cos\theta)\,dy = 0,$$

qui ne contiendra que les deux variables θ et y. Je dis que cette dernière équation a pour intégrale

$$u\sin\theta + v\cos\theta = \text{constante}.$$

Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que

$$\frac{du}{dy} = i \tang iy . w, \quad \frac{dv}{dy} = - i \tang iy . v.$$

Or cela est évident en vertu des relations (7).

Les surfaces pour lesquelles u, v, w sont fonctions de y seul sont faciles à déterminer. En effet, les équations (7) donnent sans peine, dans le cas dont il s'agit,

$$u = \text{Y}, \quad v = m \cos iy, \quad w = \frac{\text{Y}'}{i \tang iy},$$

Y étant une fonction arbitraire de y et m une constante; puis, en suivant la marche qui a été indiquée au § III, on trouve

$$z = - mxi \sin iy + \text{Y}_1.$$

Y_1 étant une nouvelle fonction de y, liée à la première par la relation

$$Y = Y_1 + i \operatorname{tang} iy \, Y'_1;$$

z étant connu, on a enfin les coordonnées d'un point quelconque de la surface par les équations (4) ou par les équations (4 *bis*). Je dis maintenant que les surfaces que nous venons d'obtenir sont engendrées par le mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ d'une courbe plane ou gauche quelconque. En effet, pour qu'une surface soit du genre hélicoïde, il faut et il suffit que lorsqu'on fait croître x de x_0 sans changer y, r reste constant, ω croisse de x_0 et ζ croisse de mx_0. Or, d'après les équations (4 *bis*), les deux premières conditions exigent : 1° que p ne contienne pas x et par conséquent que z soit de la forme $Yx + Y_1$; 2° que $Y + i \operatorname{tang} iy \, Y'$ soit nul et par conséquent que Y soit de la forme $-mi \sin iy$; d'ailleurs la troisième condition est satisfaite d'elle-même lorsque

$$Y = -mi \sin iy;$$

donc pour qu'une surface soit du genre hélicoïde, il faut et il suffit que

$$z = -mxi \sin iy + Y_1,$$

Y_1 étant une fonction arbitraire de y.

2°. Non-seulement les équations (17) et (13) facilitent, dans beaucoup de cas, la recherche des lignes géodésiques d'une surface donnée, mais elles servent surtout à déterminer une surface d'après quelque propriété relative à ses lignes géodésiques.

Cherchons, par exemple, les surfaces qui admettent comme lignes géodésiques toutes les lignes pour lesquelles l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente est une fonction connue de x et de y. L'équation (17) donnera

$$i \operatorname{tang} iy + \frac{d\theta}{dx} + \frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur déduite de la première des équations (13), on aura

$$(18) \quad \left(i \operatorname{tang} iy + \frac{d\theta}{dx}\right)(u \sin\theta - v\cos\theta) + \frac{d\theta}{dy}(u\cos\theta - v\sin\theta) = 0.$$

Si, au lieu de l'angle θ, on se donnait la tangente k de cet angle, l'équation du problème serait

$$\left[\frac{dk}{dx} + i \operatorname{tang} iy\,(1 + k^2)\right](wk - v) + \frac{dk}{dy}(u - vk) = 0.$$

3°. L'équation précédente permet de démontrer très-simplement qu'il n'est pas possible de trouver sur une surface *courbe* deux séries de lignes géodésiques qui se coupent à angle droit; propriété remarquable que M. Liouville a indiquée pour la première fois dans ses Notes à l'*Analyse appliquée* de Monge. Supposons, en effet, qu'il existe sur une surface S deux séries de lignes géodésiques orthogonales entre elles. Appellons k_1 et k_2 les tangentes des angles sous lesquels ces lignes coupent respectivement les lignes de plus grande pente, nous aurons

$$\left[\frac{dk_1}{dx} + i \operatorname{tang} iy\,(1 + k_1^2)\right](wk_1 - v) + \frac{dk_1}{dy}(u - vk_1) = 0,$$

$$\left[\frac{dk_2}{dx} + i \operatorname{tang} iy\,(1 + k_2^2)\right](wk_2 - v) + \frac{dk_2}{dy}(u - vk_2) = 0,$$

$$k_1 k_2 = -1.$$

Je multiplie la première équation par $\frac{1}{k_1}$, la seconde par $\frac{1}{k_2}$ et j'ajoute, il viendra, eu égard à la troisième,

$$w\left[\frac{dk_1}{dx} + \frac{dk_2}{dx} + i \operatorname{tang} iy\,(k_1^2 + k_2^2 + 2)\right] - v\left(\frac{dk_1}{dy} + \frac{dk_2}{dy}\right) = 0.$$

Multipliant ensuite la première équation par $\frac{1}{k_1^2}$, la seconde par $\frac{1}{k_2^2}$, et ajoutant, nous aurons

$$v\left[\frac{dk_1}{dx} + \frac{dk_2}{dx} + i \operatorname{tang} iy\,(k_1^2 + k_2^2 + 2)\right] - u\left(\frac{dk_1}{dy} + \frac{dk_2}{dy}\right) = 0;$$

la comparaison de ces deux relations donne

$$uw - v^2 = 0.$$

Or cette équation ne peut convenir à aucune surface et définit seulement une ligne, comme nous le montrerons plus loin (deuxième partie, § V).

Il ne sera pas inutile d'observer que par le choix même de nos variables indépendantes x et y, nous excluons essentiellement de nos recherches le cas des surfaces développables, de sorte que le résultat que nous venons d'obtenir ne doit pas être étendu à ces surfaces; et, en effet, on sait qu'il est toujours possible de trouver sur une surface développable et cela d'une infinité de manières deux séries de lignes géodésiques orthogonales.

4°. Proposons-nous, maintenant, de trouver les trajectoires orthogonales d'une série de lignes géodésiques. Soit θ l'angle sous lequel les lignes géodésiques considérées coupent les lignes de plus grande pente, l'équation des trajectoires orthogonales cherchées sera, d'après ce que nous avons obtenu au § VIII,

$$(u\sin\theta + v\cos\theta)dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)dy = 0.$$

Je dis que cette équation a pour premier membre une différentielle exacte. Il suffit, pour le prouver, de faire voir que

$$\frac{d(u\sin\theta + v\cos\theta)}{dy} = \frac{d(v\sin\theta + w\cos\theta)}{dx}.$$

Or en développant on trouve

$$\sin\theta\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \cos\theta\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dx}\right)$$
$$+ (u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\frac{d\theta}{dx} = 0,$$

ou bien, en tenant compte des équations (7),

$$(u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} + (w\sin\theta - v\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right) = 0.$$

ce qui a lieu en effet d'après l'équation (18). Ainsi l'équation en termes finis des trajectoires orthogonales cherchées est

(19) $$\int[(u\sin\theta + v\cos\theta)dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)dy] = c.$$

5°. Évaluons l'arc infiniment petit d'une ligne géodésique quelconque,

compris entre les deux trajectoires orthogonales qui répondent aux valeurs c et $c + dc$ de la constante c. Appelons ds la longueur de cet arc et x et y, $x + dx$ et $y + dy$ les valeurs de x et de y relatives à ses extrémités, nous aurons d'après les équations (13)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{w\sin\theta - v\cos\theta}{uw - v^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{uw - v^2},$$

et d'après l'équation (19)

$$(u\sin\theta + v\cos\theta)\,dx + (v\sin\theta + w\cos\theta)\,dy = dc;$$

éliminant dx et dy, il vient après réductions

$$ds = dc,$$

d'où

$$s = c_1 - c_2,$$

s étant l'arc fini d'une ligne géodésique quelconque, compris entre les deux trajectoires orthogonales qui répondent aux valeurs c_1 et c_2 de la constante c. Nous obtenons ainsi le beau théorème de Gauss.

6°. Je vais enfin me servir des équations (17) et (13) pour établir un théorème que Jacobi a donné sans démonstration dans un des premiers volumes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et qui se rattache à la célèbre théorie du dernier multiplicateur. Le théorème dont je veux parler s'énonce ainsi : Si on est parvenu à trouver une intégrale première

$$\theta = f(x, y, \alpha)$$

des équations (17) et (13), on connaîtra le facteur qui rend intégrable l'équation du premier ordre obtenue en remplaçant θ par sa valeur dans l'équation (13); ce facteur sera d'ailleurs, dans le cas actuel, $\frac{d\theta}{d\alpha}$. Pour le prouver, il suffit de faire voir que l'on a

$$\frac{d\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}(u\cos\theta - v\sin\theta)}{dy} + \frac{d\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}(w\sin\theta - v\cos\theta)}{dx} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{d\alpha\, dy}(u\cos\theta - v\sin\theta) + \frac{d^2\theta}{d\alpha\, dx}(w\sin\theta - v\cos\theta) \\
&- \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dy}(u\sin\theta + v\cos\theta) + \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dx}(w\cos\theta + v\sin\theta \\
&+ \frac{d\theta}{d\alpha}\left(\frac{du}{dy}\cos\theta - \frac{dv}{dy}\sin\theta + \frac{dw}{dx}\sin\theta - \frac{dv}{dx}\cos\theta\right) = 0.
\end{aligned}$$

ou bien encore, à cause des équations (7),

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\, dy}(u\cos\theta - v\sin\theta) + \frac{d^2\theta}{d\alpha\, dx}(w\sin\theta - v\cos\theta)$$

$$- \frac{d\theta}{d\alpha}\frac{d\theta}{dy}(u\sin\theta + v\cos\theta) + \frac{d\theta}{d\alpha}(w\cos\theta + v\sin\theta)\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right) = 0.$$

Or, puisque $\theta = f(x, y, \alpha)$ est une intégrale des équations (17) et (13), on a, quels que soient x, y et α,

$$\left(\frac{d\theta}{dx} + i\operatorname{tang} iy\right)(w\sin\theta - v\cos\theta) + (u\cos\theta - v\sin\theta)\frac{d\theta}{dy} = 0.$$

Différentiant cette dernière équation par rapport à α, on tombe précisément sur la condition qu'il s'agit de vérifier.

XIII.

Je terminerai par quelques mots sur les systèmes de lignes orthogonales qui peuvent partager la surface en carrés infiniment petits. On sait que ces lignes, que je proposerai d'appeler *isométriques*, sont données en égalant à zéro l'élément linéaire de la surface (*voyez* un article de M. Liouville, t. XII de ce Journal); leur détermination dépend donc dans notre système de variables de l'intégration des deux équations

$$(u + iv)\, dx + (v + iw)\, dy = 0,$$
$$(u - iv)\, dx + (v - iw)\, dy = 0.$$

Si $\alpha + i\beta$ est le facteur qui rend intégrable la première équation et

par conséquent $\alpha - i\beta$ le facteur qui rend intégrable la seconde, les équations différentielles des deux systèmes de lignes considérées seront

$$(\alpha u - \beta v)\,dx + (\alpha v - \beta w)\,dy = 0,$$

$$(\alpha v + \beta u)\,dx + (\alpha w + \beta v)\,dy = 0,$$

et α et β satisferont aux deux relations

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d(\alpha u - \beta v)}{dy} &= \frac{d(\alpha v - \beta w)}{dx},\\ \frac{d(\alpha v + \beta u)}{dy} &= \frac{d(\alpha w + \beta v)}{dx},\end{aligned}\right.$$

qui, en développant et simplifiant au moyen des égalités (7), deviennent

$$\alpha i \operatorname{tang} iy . w + \beta i \operatorname{tang} iy . v = v\frac{d\alpha}{dx} - w\frac{d\beta}{dx} - u\frac{d\alpha}{dy} + v\frac{d\beta}{dy}.$$

$$\beta i \operatorname{tang} iy . w - \alpha i \operatorname{tang} iy . v = w\frac{d\alpha}{dx} + v\frac{d\beta}{dx} - v\frac{d\alpha}{dy} - u\frac{d\beta}{dy}.$$

En cherchant l'angle θ sous lequel les lignes isométriques coupent les lignes de plus grande pente, on trouve pour les lignes du premier système

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et pour les lignes du second système

$$\operatorname{tang}\theta_2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ces deux résultats remarquables permettent de trouver simplement les équations aux différences partielles des surfaces qui admettent comme lignes isométriques deux systèmes de lignes orthogonales données, les deux systèmes de lignes de courbure, par exemple; mais ce sujet est trop vaste pour être traité ici avec l'importance qu'il mérite : je me propose d'y revenir dans une autre occasion. Je me contenterai, pour donner une idée de la marche à suivre, de considérer les surfaces qui admettent comme lignes isométriques les deux systèmes orthogonaux

formés par les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente. On a alors $\beta = 0$, et les équations (20) deviennent

$$\frac{d(\alpha u)}{dy} = \frac{d(\alpha v)}{dx}, \quad \frac{d(\alpha v)}{dy} = \frac{d(\alpha w)}{dx};$$

la seconde, en remarquant que $v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}$, $w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}$, montre que $\alpha \cos iy$ est une fonction de ζ; on peut donc poser

$$\log \alpha = \int \varphi(\zeta)\, d\zeta - \log \cos iy,$$

et la première devient

$$i \tang iy . w = v\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dx} - u\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \tang iy\right],$$

d'où

$$u = \frac{\varphi(\zeta)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 \cos iy - i \sin iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}}{\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \tang iy}.$$

Différentiant par rapport à y après avoir remplacé u par sa valeur fournie par la troisième des équations (8), on trouve

$$\begin{gathered}\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \tang iy\right]^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dx}\left[\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dy} + i \tang iy\right]\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} \\ + \left[\varphi^2(\zeta)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 - \tang^2 iy\right]\frac{d^2\zeta}{dy^2} + i \tang iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}\left[\varphi^2(\zeta) - \varphi'(\zeta)\right]\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right] \\ - (1 + 2\tang^2 iy)\varphi(\zeta)\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right] + i \tang iy \cdot \frac{d\zeta}{dy} = 0.\end{gathered}$$

Telle est l'équation aux différentielles partielles du second ordre des surfaces cherchées. Cette équation s'intègre dans plusieurs cas, comme nous le montrerons dans le travail annoncé.

XIV.

Nous allons maintenant nous occuper des formules relatives aux éléments tels que les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, les rayons de courbure des sections normales, qui dépendent essentiellement de la forme de la surface.

Reprenons l'équation

$$(3)\qquad X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z$$

du plan tangent mené par le point M à la surface S. Si dans cette équation nous faisons varier x et y de quantités infiniment petites dx, dy sans changer d'ailleurs X, Y, Z, nous aurons

$$X\sin x dx - Y\cos x dx + Z\cos iy dy = pdx + qdy,$$

et cette équation, prise conjointement avec (3), représentera une tangente quelconque MT à la surface S au point M. Les cosinus des angles que cette tangente fait avec les axes sont proportionnels aux valeurs de X, Y, Z qui vérifient les équations

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = 0,$$
$$X\sin x dx - Y\cos x dx + Z\cos iy dy = 0,$$

obtenues en négligeant les termes tout connus dans les équations de la tangente; par conséquent en appelant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ces cosinus, on a

$$\frac{\cos\alpha}{-i\sin iy\cos x dx - \sin x\cos iy dy} = \frac{\cos\beta}{-i\sin iy\sin x dx + \cos x\cos iy dy} = \frac{\cos\gamma}{dx}.$$

Cherchons maintenant la tangente MV conjuguée de MT. On sait, d'après un théorème de M. Dupin, que cette nouvelle tangente joint le point M au point infiniment voisin M' pour lequel les variables x, y sont $x + dx$, $y + dy$. Or $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ étant les coordonnées rectangles du point M', on a par les équations (5)

$$d\xi\sin x - d\eta\cos x = udx + vdy,$$
$$d\xi\cos x + d\eta\sin x = -i\tang iy(vdx + wdy),$$
$$d\zeta = \frac{1}{\cos iy}(vdx + wdy);$$

de là on déduit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, qui sont proportionnels aux cosinus des angles formés par la tangente cherchée MV avec les axes des coordonnées

XV.

La connaissance de deux tangentes conjuguées quelconques conduit aisément à l'équation des lignes de courbure; il suffit d'exprimer que les deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires entre elles, c'est-à-dire que

$$\cos\alpha d\xi + \cos\beta d\eta + \cos\gamma d\zeta = 0,$$

et il vient

$$(udx + vdy)\,dy - (vdx + wdy)\,dx = 0,$$

ou

$$(21)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u - w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Au moyen de cette équation on trouve ensuite l'angle θ sous lequel les lignes de courbure coupent les lignes de plus grande pente : en effet, les formules établies plus haut (§ VII) donnent

$$\tang\theta = \frac{dx}{dy},$$

par conséquent, on a

$$\tang^2\theta + \frac{w - u}{v}\tang\theta - 1 = 0,$$

ou

$$\tang 2\theta = \frac{2v}{w - u}.$$

On pourrait aussi obtenir la courbure géodésique des lignes de courbure, mais l'expression en est compliquée.

Faisons quelques applications de l'équation (21). Cherchons d'abord les lignes de courbure de l'ellipsoïde. On a pour cette surface

$$z^2 = a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy,$$

et par conséquent

$$zp = (b^2 - a^2)\sin x \cos x,$$

$$zq = -c^2 i \sin i y \cos i y,$$

$$zr = (b^2 - a^2)\cos^2 x - (b^2 - a^2)\sin^2 x - \frac{(b^2 - a^2)^2 \sin^2 x \cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

$$zs = \frac{c^2(b^2 - a^2)\, i \sin iy \cos iy \sin x \cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

$$zt = c^2\cos^2 iy - c^2\sin^2 iy + \frac{c^4\sin^2 iy\cos^2 iy}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - c^2\sin^2 iy},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{u - w}{v} = \frac{r - t + z}{s} = \frac{a^2b^2 - c^2\cos^2 iy\,(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) - c^2\sin^2 iy\,(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{c^2(b^2 - a^2)\, i \sin iy \cos iy \sin x \cos x};$$

ce qui donne pour l'équation différentielle des lignes cherchées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{a^2b^2 - c^2\cos^2 iy\,(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) - c^2\sin^2 iy\,(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{c^2(b^2 - a^2)\, i\sin iy \cos iy \sin x \cos x}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Pour intégrer cette équation, je multiplie par $(i \sin iy \cos iy)^2$ et je fais

$$\cos^2 x = x_1, \quad \cos^2 iy = y_1,$$

j'obtiens

$$x_1(1 - x_1)\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \left[\frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} + 2x_1 y_1 - x_1 - y_1\right]\frac{dy_1}{dx_1} + y_1(1 - y_1) = 0.$$

Différentiant par rapport à x_1, il vient

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\left[2x_1(1 - x_1)\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)} + 2x_1 y_1 - x_1 - y_1\right] = 0,$$

ou simplement

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = 0,$$

de là on tire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Ainsi les deux systèmes de lignes de

courbure sont renfermés dans l'équation

$$x_1(1-x_1)\alpha^2+\left[\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(b^2-a^2)}+2x_1y_1-x_1-y_1\right]\alpha+y_1(1-y_1)=0,$$

qui, en rétablissant les variables x et y, devient

$$\alpha^2\sin^2x\cos^2x+\alpha\left[\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(b^2-a^2)}+2\cos^2x\cos^2iy-\cos^2x-\cos^2iy\right]$$
$$+\sin^2iy\cos^2iy=0.$$

Cherchons encore les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation

$$z^m=\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy.$$

On a

$$z^{m-1}p=-\mathrm{A}\sin mx,$$
$$z^{m-1}q=-\mathrm{B}i\sin imy,$$
$$z^{m-1}r=-m\mathrm{A}\cos mx-\frac{(m-1)\mathrm{A}^2\sin^2mx}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy},$$
$$z^{m-1}s=-\frac{(m-1)\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy},$$
$$z^{m-1}t=m\mathrm{B}\cos imy+\frac{(m-1)\mathrm{B}^2\sin^2imy}{\mathrm{A}\cos mx+\mathrm{B}\cos imy};$$

de là on déduit

$$\frac{u-w}{v}=\frac{r-t+z}{s}=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}\cos imy\cos mx}{\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx},$$

ce qui donne pour l'équation différentielle des lignes cherchées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}\cos imy\cos mx}{\mathrm{AB}i\sin imy\sin mx}\frac{dy}{dx}-1=0.$$

Pour intégrer cette équation, je multiplie par $(i\sin imy)^2$ et je fais

$$\cos mx=x_1,\quad \cos imy=y_1,$$

j'obtiens

$$(1-x_1^2)\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{\mathrm{AB}}+2x_1y_1\right)\frac{dy_1}{dx_1}+(1-y_1^2)=0.$$

Différentiant par rapport à x_1, il vient

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\left[2(1-x_1^2)\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{A^2+B^2}{AB}+2x_1y_1\right]=0,$$

ou simplement

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0.$$

De là on tire

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Ainsi les deux systèmes de lignes de courbure sont renfermés dans l'équation

$$(1-x_1^2)\alpha^2+\left(\frac{A^2+B^2}{AB}+2x_1y_1\right)\alpha+1-y_1^2=0,$$

qui, en rétablissant les variables x et y, devient

$$\alpha^2\sin^2 mx+\alpha\left(\frac{A^2+B^2}{AB}+2\cos mx\cos imy\right)+\sin^2 imy=0.$$

Les surfaces que nous venons de considérer offrent un exemple de surfaces algébriques de tous les degrés qui ont pour lignes de courbure des lignes algébriques.

L'équation déjà si simple

(21) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx}-1=0$$

des lignes de courbure d'une surface quelconque peut encore être simplifiée par un choix convenable de nouvelles variables. Posons

$$x+iy=2x_1,\quad x-iy=2y_1,$$

nous aurons d'abord

$$dx^2-dy^2=2(dx_1^2+dy_1^2),\quad i\,dx\,dy=dx_1^2-dy_1^2,$$

puis

$$r = \frac{r_1}{4} + \frac{2s_1}{4} + \frac{t_1}{4},$$

$$s = i\frac{r_1}{4} - i\frac{t_1}{4},$$

$$t = -\frac{r_1}{4} + \frac{2s_1}{4} - \frac{t_1}{4},$$

en appelant r_1, s_1, t_1 les dérivées secondes de z par rapport à x_1 et à y_1. Donc l'équation (21), qui peut s'écrire ainsi

$$s(dy^2 - dx^2) + (r - t + z)\,dx\,dy = 0,$$

deviendra

$$\frac{r_1 - t_1}{2}(dx_1^2 + dy_1^2) + \left(\frac{r_1 + t_1}{2} + z\right)(dx_1^2 - dy_1^2) = 0$$

ou bien

(22) $$(r_1 + z)\,dx_1^2 = (t_1 + z)\,dy_1^2.$$

Posons encore

$$z = z_1 \cos x_1 \cos y_1,$$

il viendra

$$r_1 = \cos y_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\cos x_1 - 2\frac{dz_1}{dx_1}\sin x_1 - z_1 \cos x_1\right),$$

$$t_1 = \cos x_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dy_1^2}\cos y_1 - 2\frac{dz_1}{dy_1}\sin y_1 - z_1 \cos y_1\right),$$

et l'équation (22) prendra la forme

$$\cos y_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\cos x_1 - 2\frac{dz_1}{dx_1}\sin x_1\right) dx_1^2$$
$$= \cos x_1 \left(\frac{d^2 z_1}{dy_1^2}\cos y_1 - 2\frac{dz_1}{dy_1}\sin y_1\right) dy_1^2,$$

ou bien celle-ci

$$\cos^2 y_1 \frac{d\left(\frac{dz_1}{dx_1}\cos^2 x_1\right)}{dx_1} dx_1^2 = \cos^2 x_1 \frac{d\left(\frac{dz_1}{dy_1}\cos^2 y_1\right)}{dy_1} dy_1^2.$$

De telle sorte qu'en faisant

$$\operatorname{tang} x_1 = x_2, \quad \operatorname{tang} y_1 = y_2,$$

on aura finalement

$$\frac{d^2 z_1}{dx_2^2} dx_2^2 = \frac{d^2 z_1}{dy_2^2} dy_2^2.$$

Cette dernière équation fait connaître de nombreuses classes de surfaces pour lesquelles la détermination des lignes de courbure se ramène aux quadratures. Nous nous bornerons à signaler les deux cas où l'on a

$$z_1 = \varphi(x_2) + \psi(y_2)$$

et

$$z_1 = \varphi(x_2)\psi(y_2).$$

XVI.

Reprenons les deux systèmes d'équations

$$\frac{\cos\alpha}{-i\sin iy\cos x\,dx - \sin x\cos iy\,dy} = \frac{\cos\beta}{-i\sin iy\sin x\,dx + \cos x\cos iy\,dy} = \frac{\cos\gamma}{dx},$$

$$\left\{\begin{aligned} d\xi\sin x - d\eta\cos x &= u\,dx + v\,dy,\\ d\xi\cos x + d\eta\sin x &= -i\,\text{tang}\,iy\,(v\,dx + w\,dy),\\ d\zeta &= \frac{1}{\cos iy}(v\,dx + w\,dy),\end{aligned}\right.$$

qui définissent les directions de deux tangentes conjuguées quelconques MT et MV. Si, au lieu d'exprimer que les deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires l'une à l'autre, comme nous l'avons fait pour obtenir les lignes de courbure, nous écrivons que ces tangentes coïncident, nous aurons l'équation différentielle des lignes asymptotiques; on trouve ainsi

$$(u\,dx + v\,dy)\,dx + (v\,dx + w\,dy)\,dy = 0,$$

ou

$$(23) \qquad u\,dx^2 + 2v\,dx\,dy + w\,dy^2 = 0;$$

puis, pour l'angle θ formé avec les lignes de plus grande pente,

$$\text{tang}\,\theta = -\frac{dy}{dx},$$

et par conséquent

$$w \operatorname{tang}^2\theta - 2v \operatorname{tang}\theta + u = 0.$$

L'équation (23) est un peu moins simple que celle à laquelle on est conduit lorsqu'on prend comme variables les coordonnées ordinaires, mais elle se prête mieux à certaines applications. Dans un travail spécial que j'espère pouvoir bientôt publier, je montrerai comment l'équation (23) permet de trouver les surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des hélices.

XVII.

Cherchons l'angle de deux normales infiniment voisines, afin de pouvoir déterminer ensuite les rayons de courbure principaux. Soient M et M′ deux points infiniment voisins de la surface S. Les cosinus des angles que la normale en M fait avec les axes des ξ, η, ζ sont, en se rappelant la signification des variables x et y,

$$\frac{\cos x}{\cos iy}, \quad \frac{\sin x}{\cos iy}, \quad i \operatorname{tang} iy,$$

de même les cosinus des angles que la normale en M′ forme avec les mêmes axes, sont

$$\frac{\cos x}{\cos iy} + d\cdot\frac{\cos x}{\cos iy}, \quad \frac{\sin x}{\cos iy} + d\cdot\frac{\sin x}{\cos iy}, \quad i \operatorname{tang} iy + d.i \operatorname{tang} iy,$$

les différentielles se rapportant au déplacement de M en M′. Donc l'angle infiniment petit ω des deux normales en M et M′ est déterminé par la formule

$$\omega = \sqrt{\left(d\cdot\frac{\cos x}{\cos iy}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{\sin x}{\cos iy}\right)^2 + (d.i \operatorname{tang} iy)^2},$$

qui, en développant et simplifiant, devient

$$\omega = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\cos iy}.$$

XVIII.

Supposons maintenant que M et M' se trouvent sur une même ligne de courbure. Appelons R le rayon de courbure de la section principale tangente à cette ligne de courbure au point M et posons $MM' = ds$, nous aurons aussi

$$\omega = \frac{ds}{R},$$

par conséquent

$$R = \frac{\cos iy \, ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Mais l'équation (21), ou plutôt celle qui la précède, donne

$$\frac{u\,dx + v\,dy}{dx} = \frac{v\,dx + w\,dy}{dy} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

donc

(24) $$R = \cos iy \left(u + v\frac{dy}{dx}\right) = \cos iy \left(v\frac{dx}{dy} + w\right).$$

Telle est la relation qui lie la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative à une ligne de courbure et le rayon de courbure principal correspondant. En substituant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette relation, dans l'équation (21) des lignes de courbure, on obtient pour les deux rayons de courbure principaux

(25) $$R^2 - (u + w)\cos iy \,.\, R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0.$$

XIX.

Si les deux points M et M' étaient pris sur une même ligne asymptotique, on aurait, en posant toujours $MM' = ds$,

$$-\frac{u\,dx + v\,dy}{dy} = \frac{v\,dx + w\,dy}{dx} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

donc l'angle ω satisferait à la condition

$$\frac{ds}{\omega \cos iy} = v + w\frac{dy}{dx}.$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre cette dernière équation et l'équation (23) des lignes asymptotiques, il vient

$$\left(\frac{\omega}{ds}\right)^2 = \frac{1}{(v^2 - uw)\cos^2 iy}.$$

Ainsi le rapport $\frac{\omega}{ds}$ a la même valeur absolue quand on prend l'élément ds à partir du même point M sur l'une et sur l'autre des deux lignes asymptotiques qui se croisent en ce point, et cette valeur absolue est, d'après l'équation (25), celle de la moyenne géométrique des courbures principales. Nous retrouvons ainsi un théorème fort utile dans la théorie des surfaces gauches et que nous avons donné pour la première fois dans le Mémoire sur la théorie générale des surfaces inséré au XXXII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

XX.

Ayant déterminé la direction des lignes de courbure et les rayons de courbure principaux en chaque point de la surface, on trouve sans difficulté le rayon de courbure d'une section normale quelconque. Toutefois il convient, pour éviter des calculs assez longs, de s'aider d'une certaine interprétation géométrique des résultats précédents, interprétation que nous allons d'abord indiquer.

Considérons le plan tangent à la surface S au point M et, dans ce plan, la section conique qui, par rapport à la tangente à la ligne de plus grande pente prise comme axe des X et à la tangente à la ligne de niveau prise comme axe des Y, a pour équation

$$uY^2 + 2vXY + wX^2 = 1. \tag{26}$$

Cherchons la direction des axes de cette section conique. En désignant par m la tangente de l'angle que l'un quelconque de ces axes

fait avec l'axe des X, on a, d'après une formule connue,

$$m^2 + \frac{w - u}{v} m - 1 = 0;$$

ce qui prouve déjà que les axes de la section conique sont dirigés suivant les tangentes aux lignes de courbure ou aux sections principales.

Cherchons en second lieu la grandeur des axes. Soit $2a$ cette grandeur, a^2 sera le maximum ou le minimum de

$$X^2 + Y^2,$$

où X et Y varient de manière à toujours donner

$$uY^2 + 2vXY + wX^2 = 1.$$

Or, pour le maximum comme pour le minimum, on a

$$X\,dX + Y\,dY = 0$$

et

$$(uY + vX)\,dY + (vY + wX)\,dX = 0;$$

de là on tire

$$\frac{X}{vY + wX} = \frac{Y}{uY + vX} = X^2 + Y^2 = a^2,$$

d'où

$$\frac{1}{a^2} - w = v\frac{Y}{X}, \quad \frac{1}{a^2} - u = v\frac{X}{Y},$$

par suite

$$\frac{1}{a^2} - w = mv, \quad \frac{1}{a^2} - u = \frac{v}{m},$$

m étant le coefficient angulaire de l'axe a.

Ce résultat, rapproché des égalités (24) et de cette autre $m = \frac{dx}{dy}$ obtenue plus haut, montre qu'en appelant $2a_1$ et $2a_2$ les longueurs des deux axes de la section conique, et R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux répondant aux lignes de courbure qui ont ces axes pour tan-

gentes, on a

$$R_1 = \frac{\cos i\gamma}{a_1^2}, \quad R_2 = \frac{\cos i\gamma}{a_2^2}.$$

XXI.

Revenons maintenant à l'évaluation du rayon de courbure d'une section normale quelconque. Supposons la section conique que l'équation (26) représente, rapportée à ses axes comme axes de coordonnées; elle aura alors pour équation

$$R_1 X^2 + R_2 Y^2 = \cos i\gamma.$$

Soit $2d$ le diamètre que fait l'angle $\frac{\varpi}{2} + \alpha$ avec l'axe des X, c'est-à-dire avec la tangente à la section principale qui répond au rayon de courbure principal R_1, nous aurons

$$d^2(R_1 \sin^2\alpha + R_2 \cos^2\alpha) = \cos i\gamma,$$

d'où

$$\frac{\cos i\gamma}{d^2} = R_1 \sin^2\alpha + R_2 \cos^2\alpha;$$

mais ρ étant le rayon de courbure de la section normale qui fait l'angle α avec la section principale répondant au rayon de courbure R_1, on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} = \frac{R_1 \sin^2\alpha + R_2 \cos^2\alpha}{R_1 R_2},$$

donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos i\gamma}{R_1 R_2 d^2}$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{d^2 (uw - v^2) \cos i\gamma},$$

en remarquant que, d'après l'équation (25),

$$R_1 R_2 = (uw - v^2) \cos^2 i\gamma.$$

Telle est la relation qui existe entre le rayon de courbure ρ d'une sec-

tion normale quelconque et la demi-longueur d du diamètre de la section conique (26), qui est perpendiculaire à la tangente à cette section principale. Cette relation conduit aisément à l'expression du rayon de courbure ρ. Appelons en effet θ l'angle que la tangente à la section normale considérée forme avec la tangente à la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire avec l'axe des X du § XX; $\frac{\pi}{2} + \theta$ sera l'angle du diamètre $2d$ avec ce même axe des X, donc on aura, d'après l'équation (26),

$$d^2(u\cos^2\theta - 2v\sin\theta\cos\theta + w\sin^2\theta) = 1,$$

par suite

$$(27)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{u\cos^2\theta - 2v\sin\theta\cos\theta + w\sin^2\theta}{(uw - v^2)\cos iy}.$$

On peut encore écrire, en se rappelant les formules (13),

$$(28)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\cos iy}\left(\frac{dy}{ds}\cos\theta + \frac{dx}{ds}\sin\theta\right),$$

$\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ se rapportant à la section normale considérée.

XXII.

Nous allons encore déterminer l'angle que le plan osculateur d'une ligne de courbure fait avec le plan tangent à la surface. Soit φ cet angle. Si R est le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée, $R\sin\varphi$ représentera le rayon de courbure de cette ligne de courbure, d'après le théorème de Meunier; par conséquent $\frac{\cot\varphi}{R}$ sera la courbure géodésique de la même ligne : on aura donc, d'après l'équation (10),

$$\frac{\cot\varphi}{R}\,ds = i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx + d\theta,$$

d'où

$$\cot\varphi = i\,\mathrm{tang}\,iy.R\frac{dx}{ds} + R\frac{d\theta}{ds}.$$

Or les deux équations

$$R = \cos iy\left(u + v\frac{dy}{dx}\right),$$

$$R = \cos iy\left(v\frac{dx}{dy} + w\right),$$

obtenues au § XVIII, donnent

$$R\frac{dx}{ds} = \cos iy\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds}\right),$$

$$R\frac{dy}{ds} = \cos iy\left(v\frac{dx}{ds} + w\frac{dy}{ds}\right),$$

ou bien, à cause des équations (12),

$$R\frac{dx}{ds} = \cos iy \sin\theta,$$

$$R\frac{dy}{ds} = \cos iy \cos\theta.$$

On a donc encore

$$\cot\varphi = i\sin iy\sin\theta + \cos iy\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dy},$$

ou plus simplement

$$(29)\qquad \cot\varphi = \cos^2 iy\cdot\frac{d\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos iy}}{dy},$$

les différentielles se rapportant à un déplacement effectué sur la ligne de courbure.

XXIII.

La valeur de $\cot\varphi$ que nous venons d'obtenir permet de démontrer avec M. Joachimstal que toute ligne de courbure qui coupe la surface sous un angle constant est nécessairement plane. En effet, supposons $\cot\varphi$ constant; en intégrant l'équation précédente, il viendra

$$\frac{\sin\theta}{\cos iy} = C - i\tan iy\cot\varphi$$

ou

$$\sin\theta = C\cos iy - i\sin iy\cot\varphi,$$

et en changeant les constantes C et $\cot\varphi$ en deux autres m et y_0 d'une forme convenable

$$\sin\theta = mi\sin i(y - y_0).$$

Or, d'après ce qu'on a vu au § XV,

$$\tang\theta = \frac{dx}{dy},$$

on déduit de là

$$dx = \frac{mi\sin i(y - y_0)\,dy}{\sqrt{1 + m^2 - m^2\cos^2 i(y - y_0)}},$$

et en intégrant une seconde fois,

$$\cos(x - x_0) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\cos i(y - y_0),$$

x_0 étant une nouvelle constante. Cette équation convient non-seulement à la ligne de courbure, mais encore à la transformée sphérique de la ligne de courbure, d'après une remarque faite dans l'introduction; cette transformée sphérique est donc un cercle (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe cahier, p. 124), par conséquent une courbe plane; donc la ligne de courbure qui a ses tangentes respectivement parallèles à celles de sa transformée sphérique, est aussi une courbe plane.

La réciproque du théorème de M. Joachimstal, d'après laquelle toute ligne de courbure plane coupe nécessairement la surface sous un angle constant, s'établirait en reprenant les mêmes calculs en sens inverse.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE QUELQUES SURFACES D'APRÈS CERTAINES PROPRIÉTÉS RELATIVES À LA COURBURE.

Pour montrer l'utilité des formules obtenues dans la première partie, nous allons appliquer ces formules à la solution de quelques problèmes. Les questions que nous considérons dans ce premier travail

ont, pour la plupart, déjà été traitées par d'autres méthodes; mais nous espérons pouvoir montrer plus tard que nos formules se prêtent aussi bien à des recherches qu'il serait à peu près impossible d'aborder par les méthodes anciennes.

I. — Surfaces dont tous les points sont des ombilics.

Les rayons de courbure principaux d'une surface quelconque sont donnés par l'équation du second degré

$$R^2 - (u + w)\cos iy . R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0;$$

en exprimant l'égalité des racines, on a la condition

$$(u + w)^2 - 4(uw - v^2) = (u - w)^2 + 4v^2,$$

qui se décompose en ces deux-ci :

$$u = w, \quad v = 0.$$

Joignant à ces deux conditions les suivantes :

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy . w,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy . v,$$

que remplissent toujours les fonctions u, v, w, nous trouvons sans difficulté

$$u = w = \frac{m}{\cos iy}, \quad v = 0,$$

m étant une constante arbitraire. Les fonctions u, v, w étant connues, la surface est déterminée, et pour en avoir l'équation il suffit de suivre la marche qui a été indiquée au § III; on obtient ainsi

$$\zeta = - mi \operatorname{tang} iy,$$

en laissant de côté une première constante inutile, puis

$$z = m \cos iy + X,$$

puis

$$X = 0,$$

en laissant de côté deux nouvelles constantes sans importance; enfin, on a

$$\xi \cos x + \eta \sin x = -\frac{m}{\cos iy},$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = 0,$$

$$\zeta = -\frac{mi \sin iy}{\cos iy}.$$

d'où, en faisant la somme des carrés membre à membre,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = m^2.$$

Ainsi la sphère est la seule surface dont tous les points soient des ombilics.

II. — Surfaces dont les rayons de courbure principaux sont constants.

M. J. Bertrand a démontré, par des considérations infinitésimales, que la sphère est la seule surface dont les deux rayons de courbure principaux soient constants; cette propriété résulte simplement de nos formules. En effet, pour que les deux rayons de courbure principaux d'une surface soient constants, il faut et il suffit que l'on ait

$$u + w = \frac{2a}{\cos iy},$$

$$uw - v^2 = \frac{b}{\cos^2 iy},$$

a et b étant des constantes. Éliminons u entre ces deux relations et les suivantes :

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy . w,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy . v,$$

nous aurons

$$v^2 + w^2 - \frac{2aw}{\cos iy} = -\frac{b}{\cos^2 iy},$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} = \frac{2ai\sin iy}{\cos^2 iy} - i\,\mathrm{tang}\, iy \,.\, w,$$

$$\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dy} = i\,\mathrm{tang}\, iy \,.\, v.$$

Posons

$$w - \frac{a}{\cos iy} = w_1,$$

il viendra

$$v^2 + w_1^2 = \frac{a^2 - b}{\cos^2 iy},$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dw_1}{dy} = -i\,\mathrm{tang}\, iy \,.\, w_1,$$

$$\frac{dw_1}{dx} - \frac{dv}{dy} = i\,\mathrm{tang}\, iy \,.\, v,$$

ou bien, en faisant $v = \omega_1 \cos iy$, $w_1 = \omega_2 \cos iy$,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{a^2 - b}{\cos^4 iy},$$

$$\frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy} = 0,$$

$$\frac{d\omega_1}{dy} - \frac{d\omega_2}{dx} = 0.$$

Lorsque $a^2 = b$, ces trois équations sont vérifiées pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, et l'on a une sphère. Je dis qu'il n'y a aucune solution lorsque a^2 est différent de b. En effet, dans ce cas on peut poser

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\cos^2 iy} \sin\alpha,$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\cos^2 iy} \cos\alpha;$$

α étant réel, car ω_1 et ω_2 sont réels. La première équation est ainsi

satisfaite d'elle-même, et les deux autres deviennent

$$\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\tang iy\right)-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dy}+\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\tang iy\right)=0;$$

d'où, en faisant la somme des carrés membre à membre,

$$\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dx}+2i\tang iy\right)^2=0,$$

et par conséquent, puisque α est réel,

$$\frac{d\alpha}{dy}=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}+2i\tang iy=0,$$

ce qui est évidemment impossible.

III. — Surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans des plans parallèles.

Prenons pour plan des (ξ,η) celui auquel sont parallèles les plans des lignes de première courbure. Ces lignes seront alors les lignes de niveau par rapport au plan des (ξ,η); par conséquent l'équation (21),

$$v\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(u-w)\frac{dy}{dx}-v=0,$$

devra être vérifiée par la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que l'on déduit de

$$vdx+wdy=0;$$

nous aurons donc

$$v(uw-v^2)=0,$$

et par conséquent

$$v=0,$$

car $uw-v^2$ ne peut pas être nul (*voyez* le § V). Cette condition prouve d'abord que l'on a pour les lignes de première courbure,

$$\frac{dy}{dx}=0\quad\text{ou}\quad y=\text{const}.$$

et pour les lignes de seconde courbure

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{ou} \quad x = \text{const.}$$

Ainsi les lignes de courbure sont les parallèles et les méridiens. On voit de plus que les lignes de seconde courbure sont planes, comme les lignes de première courbure, et que leurs plans sont perpendiculaires à ceux des lignes de première courbure. Si maintenant on se rappelle que

$$\nu = \frac{d^2 z}{dx\,dy},$$

on trouve

$$z = \mathrm{X} + \mathrm{Y},$$

X étant une fonction de x et Y une fonction de y. Puis on a

$$\xi \cos x + \eta \sin x = - \mathrm{X} - \mathrm{Y} - i \operatorname{tang} iy . \mathrm{Y}',$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = \mathrm{X}',$$

$$\zeta = \frac{\mathrm{Y}'}{\cos iy},$$

pour les équations qui déterminent les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface.

Il est facile de déduire des équations précédentes la génération de la surface. En effet, considérons une ligne de niveau caractérisée par la condition $y =$ const. La projection de cette ligne sur le plan des (ξ, η) a pour équations

$$\xi \cos x + \eta \sin x = - \mathrm{X} - \mathrm{Y} - i \operatorname{tang} iy\, \mathrm{Y}',$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = \mathrm{X}';$$

donc cette projection est une ligne parallèle à celle que définissent les équations

$$\xi \cos x + \eta \sin x = - \mathrm{X},$$

$$\xi \sin x - \eta \cos x = \mathrm{X}',$$

la distance des deux lignes étant d'ailleurs $\mathrm{Y} + i \operatorname{tang} iy\, \mathrm{Y}'$. On déduit

de là que les sections faites dans la surface par tous les plans parallèles au plan des (ξ, η) sont en projection sur ce plan les développantes d'une même ligne. Par conséquent la surface est engendrée par une courbe tracée dans le plan tangent à un cylindre perpendiculaire au plan des (ξ, η), lorsqu'on enroule ce plan sur le cylindre.

Pour que la surface devienne de révolution, il faut et il suffit que les lignes de niveau soient des cercles; donc on doit avoir

$$X = 0,$$

par suite

$$z = Y,$$

et enfin

$$u = i \operatorname{tang} iy \,.\, Y' + Y, \quad w = Y'' + i \operatorname{tang} iy \,.\, Y'$$

Ces valeurs de u et de w, auxquelles il faut joindre la valeur zéro de v, montrent que dans le cas des surfaces de révolution l'intégration des équations qui fournissent les lignes asymptotiques, les lignes géodésiques, les lignes isométriques, etc., se ramène aux quadratures. Nous n'insisterons pas sur ces détails, qui sont parfaitement connus.

IV. — Surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite.

Lorsqu'une surface admet des génératrices rectilignes, ces génératrices sont évidemment des lignes asymptotiques; d'un autre côté, la transformée sphérique d'une ligne droite, quelle que soit la surface sur laquelle cette droite est tracée, ne peut être qu'un grand cercle, et doit, par conséquent, dans notre système de coordonnées, avoir pour équation

$$(30) \qquad \cos(x - \alpha) = \sin i\beta \sin iy,$$

α et β étant des constantes. Il suit de là que pour avoir l'équation des surfaces cherchées il suffit de regarder, dans l'équation précédente, β comme une fonction de α, de tirer de cette équation les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$ et d'exprimer que les valeurs obtenues vérifient l'équa-

tion (23), c'est-à-dire

$$(23)\quad r + i\tan iy.q + z + 2s\frac{dy}{dx} + (t + i\tan iy.q)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

quels que soient x et α. Nous prendrons pour variables indépendantes x et α au lieu de x et de y. En appelant p_1 et r_1 les nouvelles dérivées première et seconde de z par rapport à x, on trouve aisément

$$p_1 = p + q\frac{dy}{dx},$$

$$r_1 = r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q\frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui transforme l'équation (23) en celle-ci

$$r_1 + z + q\left[i\tan iy\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0.$$

Mais de l'équation (30) on tire

$$-\sin(x-\alpha) = i\sin i\beta\cos iy\frac{dy}{dx},$$

$$-\cos(x-\alpha) = \sin i\beta\sin iy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i\sin i\beta\cos iy\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \cos(x-\alpha)\frac{dy^2}{dx^2} + \cos(x-\alpha)\,i\cot iy\frac{d^2y}{dx^2}:$$

d'où

$$i\tan iy\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

On a donc simplement

$$r_1 + z = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$z = \gamma\cos x + \delta\sin x,$$

γ et δ étant des fonctions de α. Ainsi l'équation en z, x et y de la surface cherchée est le résultat de l'élimination de α entre ces

deux-ci :

$$z = \gamma \cos x + \delta \sin x,$$

$$\cos(x - \alpha) = \sin i\beta \sin iy,$$

où β, γ et δ sont des fonctions arbitraires de α.

Lorsque la surface réglée considérée est à plan directeur, les grands cercles transformés sphériques des génératrices rectilignes sont perpendiculaires à un même plan, et passent par conséquent par un même point. Si l'on suppose ce point sur l'axe des ζ, l'équation (30) se réduit à $x = \alpha$; on ne peut donc plus prendre x et α pour variables indépendantes, et le résultat précédent se trouve en défaut. Mais l'équation (23) devant être vérifiée par $\frac{dx}{dy} = 0$, on a alors

$$t + i \operatorname{tang} iy \,.\, q = 0,$$

d'où

$$z = X_1 + X_2 i \sin iy,$$

X_1 et X_2 étant deux fonctions arbitraires de x.

V. — Surfaces dont un des rayons de courbure principaux est constant.

Reprenons l'équation du second degré

$$R^2 - (u + w) \cos iy \,.\, R + (uw - v^2) \cos^2 iy = 0,$$

qui donne les rayons de courbure principaux d'une surface quelconque; si nous exprimons que l'une des racines est égale à la constante a, nous aurons

$$(31) \qquad a^2 - a(u + w) \cos iy + (uw - v^2) \cos^2 iy = 0,$$

ou bien

$$(u \cos iy - a)(w \cos iy - a) - v^2 \cos^2 iy = 0,$$

pour l'équation aux différentielles partielles secondes de la surface.

Changeons dans cette équation z en $z + a \cos iy$; il est facile de voir que v ne changera pas et que u et w augmenteront l'un et l'autre

de $\frac{a}{\cos iy}$: nous aurons donc

$$(32)\qquad uw - v^2 = 0,$$

et c'est cette dernière équation qu'il suffira d'intégrer. Je l'écris ainsi

$$u = \frac{v^2}{w};$$

puis je différentie par rapport à y; en se rappelant les égalités (8), on trouve

$$\cos iy \cdot \frac{d^2\zeta}{dx^2} + i\sin iy \cdot \frac{d\zeta}{dy} = -\frac{i\sin iy\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}{\frac{d\zeta}{dy}} + \frac{2\cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}}{\frac{d\zeta}{dy}} - \frac{\cos iy\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\frac{d^2\zeta}{dy^2}}{\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2};$$

ou bien

$$(33)\qquad q^2 r - 2pqs + p^2 t + i\,\mathrm{tang}\,iy \cdot q\,(p^2 + q^2) = 0,$$

en posant, pour ne pas multiplier les notations,

$$\frac{d\zeta}{dx} = p,\quad \frac{d\zeta}{dy} = q,\quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = s,\quad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = t.$$

L'équation (33) s'intègre aisément par la méthode de Monge; en effet, les équations de la caractéristique qui se réduisent ici à

$$q^2\,dy^2 + 2pq\,dx\,dy + p^2\,dx^2 = 0,$$
$$q^2\frac{dy}{dx}dp + p^2 dq + i\,\mathrm{tang}\,iy . q\,(p^2 + q^2)\,dy = 0,$$

admettent deux combinaisons intégrables et donnent

$$\zeta = c,$$
$$q = c'\cos iy . \sqrt{p^2 + q^2};$$

on a donc

$$q = \varphi(\zeta)\cos iy . \sqrt{p^2 + q^2},$$

ou mieux

$$q\sqrt{1 - \varphi^2(\zeta)\cos^2 iy} = p\,\varphi(\zeta)\cos iy,$$

pour l'intégrale première. D'autre part l'équation du premier ordre que l'on vient d'obtenir étant linéaire, si l'on pose, conformément à la méthode connue, les équations simultanées

$$\frac{dx}{\varphi(\zeta)\cos iy} = \frac{dy}{-\sqrt{1-\varphi^2(\zeta)\cos^2 iy}} = \frac{d\zeta}{0},$$

on trouve

$$\zeta = c, \quad x + c' = \arcsin\frac{\varphi(c)\, i\sin iy}{\sqrt{1-\varphi^2(c)}};$$

par conséquent, l'intégrale définitive est

$$\frac{\varphi(\zeta)\, i\sin iy}{\sqrt{1-\varphi^2(\zeta)}} = \sin[x + \varphi_1(\zeta)],$$

ou mieux

$$(34) \qquad i\sin iy + \psi(\zeta)\cos x + \psi_1(\zeta)\sin x = 0.$$

L'intégrale de l'équation (33) étant connue, on en déduit celle de l'équation (32) et puis celle de l'équation (31); mais il faut pour cela connaître d'abord la valeur de z en x et y. Or on a, comme on sait, entre les deux fonctions ζ et z la relation

$$\zeta = \frac{\frac{dz}{dy}}{\cos iy};$$

d'où l'on tire

$$z = \int \zeta \cos iy\, dy + \mathrm{X}.$$

Si ζ était connu explicitement en fonction de y, l'équation précédente donnerait z; malheureusement l'équation (34) renferme des fonctions arbitraires où entre ζ, et ne peut par conséquent pas être résolue par rapport à cette variable. Pour lever la difficulté, on remarque que

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta\, i\sin iy + \int \frac{d\zeta}{dy}\, i\sin iy\, dy;$$

substituant alors à $i\sin iy$ sa valeur fournie par l'équation (34), il vient

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta\, i\sin iy - \cos x \int \psi(\zeta)\, d\zeta - \sin x \int \psi_1(\zeta)\, d\zeta$$

ou, en remplaçant $\psi(\zeta)$ par $\psi'(\zeta)$ et $\psi_1(\zeta)$ par $\psi'_1(\zeta)$,

$$\int \zeta \cos iy\, dy = -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x,$$

de sorte que la valeur cherchée de z est le résultat de l'élimination de ζ entre l'équation

$$z = -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x + X$$

et l'équation (34) qui, par notre changement de notations, prend la forme

$$o = -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x.$$

La valeur de z que nous venons d'obtenir se rapporte toujours à l'équation (33); pour qu'elle devienne l'intégrale de l'équation (32), il nous reste encore à particulariser d'une manière convenable la fonction X de x.

Or on a

$$u = \frac{d^2 z}{dx^2} + i \tang iy \cdot \frac{dz}{dy} + z,$$

$$v = \frac{d^2 z}{dz\,dy},$$

$$w = \frac{d^2 z}{dy^2} + i \tang iy \cdot \frac{dz}{dy}.$$

D'ailleurs les équations

$$z = -\zeta i \sin iy - \psi(\zeta)\cos x - \psi_1(\zeta)\sin x + X,$$

$$o = -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x,$$

donnent

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\zeta)\sin x - \psi_1(\zeta)\cos x + X',$$

$$\frac{dz}{dy} = \zeta \cos iy,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \psi(\zeta)\cos x + \psi_1(\zeta)\sin x + [\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + X'',$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy - \zeta i \sin iy;$$

donc

$$u = [\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + X'' + X,$$

$$v = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy,$$

$$w = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy.$$

Substituant dans l'équation (32), on trouve

$$\frac{d\zeta}{dy}\left\{[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\frac{d\zeta}{dx} + X'' + X\right\} - \cos iy\cdot\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = 0,$$

ou simplement

$$X'' + X = 0;$$

car, en différentiant successivement par rapport à y et par rapport à x, l'équation

$$0 = -i\sin iy - \psi'(\zeta)\cos x - \psi'_1(\zeta)\sin x,$$

on a

$$\cos iy = [\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x]\frac{d\zeta}{dy}$$

$$\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x = [\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x]\frac{d\zeta}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\zeta}{dy}[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x] - \frac{d\zeta}{dx}\cos iy = 0.$$

Ainsi X est nul, en laissant de coté des constantes sans importance, et l'intégrale de l'équation (32) est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$(35)\qquad \begin{cases} z = -\alpha i\sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x, \\ 0 = -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x; \end{cases}$$

par conséquent l'intégrale de l'équation (31) est représentée par le système des deux équations

$$(36)\qquad \begin{cases} z = a\cos iy - \alpha i\sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x, \\ 0 = -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x. \end{cases}$$

Tâchons maintenant d'obtenir la génération de la surface. Des deux équations (36) la seconde est la dérivée relative à α de la première; je dis qu'il résulte de là que la surface S représentée par le système des deux équations (36) est l'enveloppe de la surface mobile s que définit la première de ces deux équations lorsque l'on considère α comme un paramètre variable. Soit, en effet, une des surfaces s que nous appellerons s_0 et que nous supposerons obtenue en donnant au paramètre α la valeur particulière α_0. Considérons sur cette surface s_0 et sur la surface S les lignes c_0 et C pour lesquelles on a

$$o = -i\sin iy - \psi'(\alpha_0)\cos x - \psi'_1(\alpha_0)\sin x.$$

Il est facile de voir que la valeur de z sera la même pour les points de ces lignes répondant aux mêmes valeurs de x et de y; de plus, comme les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ont la même valeur, soit qu'on les tire de l'équation obtenue en éliminant α entre les deux équations (36), soit qu'on les tire de la première des équations (36) dans l'hypothèse de α constant, on reconnaît par les égalités (4) que les coordonnées rectangles ξ, η, ζ sont aussi les mêmes pour les points des courbes c_0 et C répondant aux mêmes valeurs de x et de y. Ainsi les lignes c_0 et C se confondent, et les surfaces s_0 et S sur lesquelles elles sont respectivement tracées sont d'ailleurs tangentes tout le long de ces lignes. Donc la surface S est bien l'enveloppe de la surface mobile s. Ceci posé, cherchons quelle est la surface s représentée par la première des équations (36) lorsque α est considéré comme constant. Or, dans cette hypothèse de α constant, on a

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\alpha)\sin x - \psi_1(\alpha)\cos x,$$

$$\frac{dz}{dy} = -\alpha i\sin iy + \alpha\cos iy;$$

substituant dans les égalités (4), il vient

$$[\xi - \psi(\alpha)]\cos x + [\eta - \psi_1(\alpha)]\sin x = -\frac{a}{\cos iy},$$

$$[\xi - \psi(\alpha)]\sin x - [\eta - \psi_1(\alpha)]\cos x = o,$$

$$\zeta - \alpha = -ai\operatorname{tang} iy,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la surface. Faisant la somme des carrés, membre à membre, on trouve

$$[\xi - \psi(\alpha)]^2 + [\eta - \psi_1(\alpha)]^2 + (z - \alpha)^2 = a^2,$$

c'est-à-dire l'équation d'une sphère de rayon a et dont le centre a pour coordonnées $\psi(\alpha)$, $\psi_1(\alpha)$ et α. Ainsi la surface cherchée est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant égal à a et dont le centre parcourt une ligne tout à fait quelconque.

Reprenons l'intégrale de l'équation

$$uw - v^2 = 0,$$

intégrale qui, d'après ce que l'on a vu, est représentée par le système des deux équations

$$(35) \quad \begin{cases} z = -\alpha i \sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x, \\ 0 = -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x, \end{cases}$$

et cherchons-en aussi la signification géométrique. En différentiant la première des équations (35) successivement par rapport à x et par rapport à y, α étant, bien entendu, considéré comme variable, on trouve simplement, à cause de la seconde équation,

$$\frac{dz}{dx} = \psi(\alpha)\sin x - \psi_1(\alpha)\cos x,$$

$$\frac{dz}{dy} = \alpha\cos iy.$$

Portant ces valeurs dans les égalités (4), on a

$$[\xi - \psi(\alpha)]\cos x + [\eta - \psi_1(\alpha)]\sin x = 0,$$
$$[\xi - \psi(\alpha)]\sin x - [\eta - \psi_1(\alpha)]\cos x = 0,$$
$$\zeta = \alpha,$$

d'où

$$\xi = \psi(\alpha), \quad \eta = \psi_1(\alpha), \quad \zeta = \alpha.$$

Ainsi le lieu géométrique correspondant à l'intégrale considérée est la ligne dont les équations sont

$$\xi = \psi(\zeta), \quad \eta = \psi_1(\zeta).$$

Le résultat précédent pouvait être prévu. En effet, on obtient le lieu géométrique correspondant à l'intégrale de l'équation (32) en effectuant, sur la surface représentée par l'intégrale de l'équation (31), une contraction constante et égale à a suivant la normale : c'est ce qui résulte de la relation qui existe entre les valeurs de z déduites des deux intégrales. Or, d'après la nature même de la surface, la contraction suivant la normale dont il s'agit doit donner les centres des sphères de rayon a dont la surface est l'enveloppe; donc le lieu géométrique de l'intégrale (32) est la ligne que décrit le centre mobile de la sphère de rayon a.

VI. — Digression sur un nouveau mode de représentation des lignes courbes.

Cette particularité d'après laquelle toute ligne plane ou gauche peut être représentée par une seule relation entre z, x, y, comme le sont toutes les surfaces *courbes*, est très-remarquable et permet de déduire les formules relatives à la théorie des lignes courbes de celles qui ont été établies pour les surfaces. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Prenons d'abord l'équation générale des lignes de courbure

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u - w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

et faisons $uw - v^2 = 0$ afin d'exprimer que la relation entre z, x, y se rapporte à une ligne; nous aurons

$$vdx + wdy = 0, \quad vdy - wdx = 0.$$

Ces deux équations font connaître tous les systèmes de normales à la ligne considérée qui forment des surfaces développables. La première, qui se réduit à $\zeta =$ const., donne toutes les normales qui partent d'un même point de la courbe et qui forment les plans normaux; la seconde fournit les normales qui par leurs intersections successives forment les développées de la courbe. Ainsi on voit que la détermination des développées se ramène à l'intégration de l'équation

$$vdy - wdx = 0.$$

Considérons, en second lieu, les équations

$$d\theta + i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx = 0,$$
$$(u\cos\theta - v\sin\theta)\,dx - (w\sin\theta - v\cos\theta)\,dy = 0,$$

des lignes géodésiques. L'hypothèse $uw - v^2 = 0$ décompose la seconde équation en ces deux-ci

$$v\,dx + w\,dy = 0,$$
$$w\sin\theta - v\cos\theta = 0.$$

L'équation $v\,dx + w\,dy = 0$, qui revient à $\zeta =$ const., ne donne que les normales issues d'un même point de la courbe; l'autre équation doit donc fournir les normales principales, d'après la propriété caractéristique des lignes géodésiques. Or on en tire

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{v}{w},$$

d'où, en portant dans la première équation des lignes géodésiques,

$$\left[w\frac{dv}{dx} - v\frac{dw}{dx} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,(v^2 + w^2)\right]dx + \left(w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy}\right)dy = 0.$$

et, en se rappelant les équations (7),

$$\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right)dx + \left(w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy}\right)dy = 0.$$

D'ailleurs de l'équation

$$uw - v^2 = 0,$$

qui revient à

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{w},$$

on déduit

$$\frac{w^2}{v^2}\left(v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy}\right) = w\frac{dv}{dy} - v\frac{dw}{dy};$$

donc on a

$$v^2\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right)dx + w^2\left(v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy}\right)dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$v(vdx + wdy)\left(w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy}\right) = 0,$$

et en laissant de côté les deux premiers facteurs,

$$w\frac{du}{dy} - v\frac{dv}{dy} = 0,$$

ou bien enfin

$$\frac{d\cdot\frac{u}{v}}{dy} = \frac{d\cdot\frac{v}{w}}{dy} = 0,$$

à cause de

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{w}.$$

Telle est l'équation qui définit les normales principales de la courbe.

Considérons enfin l'équation

$$R^2 - (u + w)\cos iy.R + (uw - v^2)\cos^2 iy = 0,$$

qui fait connaître les rayons de courbure principaux; si on fait $uw - v^2 = 0$, on trouve

$$R = (u + w)\cos iy,$$

en laissant de côté une valeur nulle. Cette formule, lorsqu'on considère x et y comme déterminés, c'est-à-dire lorsqu'on prend une normale particulière, donne la portion de la normale comprise entre la courbe et la surface polaire. Si on suppose que x et y satisfassent à la condition

$$\frac{d\cdot\frac{v}{w}}{dy} = 0,$$

on a le rayon de courbure ordinaire.

Nous pourrions obtenir d'une manière analogue plusieurs autres résultats, mais, pour le moment, nous bornerons là cette digression. Montrons seulement ici comment, au moyen des équations de la courbe, on peut calculer u, v, w.

$$\xi = \psi(\zeta) \quad \eta = \psi_1(\zeta)$$

étant les équations de la courbe, la relation en z, x, y est, comme on l'a vu, le résultat de l'élimination du paramètre α entre les deux équations

$$z = -\alpha i \sin iy - \psi(\alpha)\cos x - \psi_1(\alpha)\sin x,$$

$$0 = -i\sin iy - \psi'(\alpha)\cos x - \psi'_1(\alpha)\sin x;$$

de plus, on a

$$\alpha = \zeta.$$

Or, d'après les formules (8),

$$v = \frac{d\zeta}{dx}\cos iy, \quad w = \frac{d\zeta}{dy}\cos iy:$$

donc

$$v = \frac{[\psi'(\zeta)\sin x - \psi'_1(\zeta)\cos x]\cos iy}{\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x},$$

$$w = \frac{\cos^2 iy}{\psi''(\zeta)\cos x + \psi''_1(\zeta)\sin x};$$

v et w étant connus, on obtient u au moyen de la relation

$$uw - v^2 = 0.$$

VII. — Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

La transformée sphérique d'une ligne de courbure a toujours ses tangentes respectivement parallèles à celles de la ligne de courbure. Il suit évidemment de là que pour qu'une surface ait toutes ses lignes de courbure planes, il faut et il suffit que les transformées sphériques des lignes de courbure soient, pour cette surface, deux séries de cercles orthogonaux. Ceci posé, nous allons d'abord chercher sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées tous les systèmes de cercles orthogonaux.

L'équation des cercles du premier système peut être mise sous la forme

(37) $$\cos(x-a) + c\cos ib \cos iy = \sin ib \sin iy,$$

ou bien encore sous celle-ci

$$(37\ bis)\qquad \cos(x-a)+r\cos i(y-d)=0,$$

a, b, c, r, d étant des fonctions arbitraires d'un paramètre variable t (*voyez* mon Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, XXXV[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).

De même l'équation des cercles du second système est

$$(38)\qquad \cos(x-\alpha)+\gamma\cos i\beta\cos iy=\sin i\beta\sin iy$$

ou

$$(38\ bis)\qquad \cos(x-\alpha)+\rho\cos i(y-\delta)=0,$$

α, β, γ, ρ, δ étant des fonctions arbitraires d'un second paramètre variable τ.

Pour que les cercles du premier système soient orthogonaux avec ceux du second, il faut et il suffit que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (37 *bis*), qui est $-\frac{\sin(x-a)}{ri\sin i(y-d)}$, et la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (38 *bis*), qui est $-\frac{\sin(x-\alpha)}{\rho i\sin i(y-\delta)}$, donnent pour produit -1; on a donc

$$\sin(x-a)\sin(x-\alpha)=r\rho\sin i(y-d)\sin i(y-\delta),$$

ou, en éliminant x et y au moyen des équations (37 *bis*) et (38 *bis*),

$$\cos(a-\alpha)=r\rho\cos i(d-\delta);$$

d'ailleurs cette dernière relation doit être satisfaite quels que soient t et τ. Nous mettrons l'égalité précédente sous la forme

$$(39)\qquad \cos a\cos\alpha+\sin a\sin\alpha-c\gamma\cos ib\cos i\beta-\sin ib\sin i\beta=0,$$

afin d'y introduire les quantités b, c, β, γ; et pour faciliter l'interprétation des résultats qui vont suivre, nous rappellerons que a et b, α et β représentent respectivement les coordonnées sphériques x et y des pôles

des cercles du premier et du second système, tandis que c et γ sont les cosinus des rayons sphériques de ces cercles.

Supposons d'abord $c = 0$ et $a = 0$, auquel cas les cercles représentés par l'équation (37) sont des grands cercles passant tous par le point $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$; l'équation (39) devient

$$\cos\alpha = \sin ib \sin i\beta,$$

et comme b doit rester indéterminé, sans quoi la série des cercles (37) se réduirait à un seul cercle, on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 0;$$

donc les cercles du second système ont tous pour pôle le point par lequel passent tous les grands cercles du premier système; en d'autres termes, le double système obtenu est celui que forment un système de méridiens et le système des parallèles correspondants.

Supposons en second lieu c nul, mais a différent de 0; en divisant l'équation (39) par $\sin a$ et prenant les dérivées relatives à t du résultat, nous aurons

$$(40) \qquad \cos\alpha(\cot a)' = \sin i\beta \left(\frac{\sin ib}{\sin a}\right)'.$$

La dérivée $(\cot a)'$ peut être nulle ou différente de zéro. Dans le premier cas a est constant, et en changeant d'une manière convenable le méridien à partir duquel on compte les x, on peut supposer a nul, ce qui nous fait rentrer dans le cas examiné. Si $(\cot a)'$ est différent de zéro, en divisant par ce facteur et prenant ensuite la dérivée relative à t, il vient

$$0 = \sin i\beta \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{\sin a}\right)'}{(\cot a)'}\right]',$$

d'où l'on tire $\beta = 0$, ou bien $\sin ib = m\cos a + n\sin a$ (m et n étant des constantes arbitraires). La première condition est inadmissible, car elle réduit l'équation (40) à $\cos\alpha = 0$ et puis l'équation (39) à $\sin\alpha = 0$. La seconde exprime que les grands cercles représentés par l'équation

(37) ont leurs pôles sur un même grand cercle; or rien n'empêche de prendre ce dernier grand cercle pour celui à partir duquel on compte les x : alors $a = 0$ et nous retombons encore sur le premier cas. Ainsi quand c est nul, c'est-à-dire quand les cercles de l'un des systèmes sont des grands cercles, on ne trouve pour systèmes orthogonaux que les systèmes évidents formés par des méridiens et les parallèles correspondants.

Supposons maintenant c et γ différents de zéro. $\cos ib$ n'étant jamais nul, nous pourrons diviser l'équation (39) par $c\cos ib$, et en prenant la dérivée relative à t du résultat, nous aurons

$$(41) \qquad \cos\alpha\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)' + \sin\alpha\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)' = \sin i\beta\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'.$$

Il peut se faire d'abord que les dérivées $\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'$, $\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'$ soient toutes les deux nulles; dans ce cas, a et $c\cos ib$ sont constants, et l'égalité (41) montre que $\beta = 0$; en effet $\frac{\sin ib}{c\cos ib}$ ne peut pas être constant, sans quoi a, b et c seraient constants et les cercles du premier système se réduiraient à un seul. Ces résultats montrent que le lieu des pôles des cercles de chaque série est un grand cercle, et que les deux lieux correspondant aux deux séries de cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre. Pour achever de déterminer les deux séries de cercles auxquels nous sommes ainsi conduits, supposons que les grands cercles qui contiennent leurs pôles soient les méridiens $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on aura alors $a = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'équation (39) deviendra

$$c\gamma\cos ib\cos i\beta = -\sin ib\sin i\beta.$$

Mais aucun des facteurs du premier membre ne peut être nul; donc on a

$$c\cot ib = m, \quad \gamma\cot i\beta = -\frac{1}{m},$$

m étant une constante. En introduisant dans les équations (37) et (38) les conditions précédentes, on trouve pour les équations des séries de cercles obtenus

$$\cos x = \sin ib\,(\sin iy - m\cos iy),$$

$$\sin x = \sin i\beta\left(\sin iy + \frac{1}{m}\cos iy\right).$$

que nous mettrons sous la forme

$$\cos x = \alpha \cos i(y - m),$$
$$\sin x = \beta i \sin i(y - m),$$

m étant une constante et α et β les deux paramètres variables.

Revenons à la discussion de l'équation (41), et supposons que l'une des deux dérivées $\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'$, $\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'$, la première par exemple, ne soit pas nulle : divisant par cette dérivée et différentiant par rapport à t, il viendra

$$(42) \qquad \cos\alpha \left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = \sin i\beta \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]' = 0,$$

ou

$$\cos a = m\sin a + nc\cos ib$$

et

$$\sin ib = p\sin a + qc\cos ib,$$

m, n, p et q étant des constantes; de ces deux résultats on tire

$$q\cos a - n\sin ib = (mq - np)\sin a,$$

ce qui prouve que les pôles des cercles du premier système sont sur un même grand cercle; mais on a alors par l'équation (41)

$$m\cos\alpha + \sin\alpha = p\sin i\beta;$$

d'où l'on déduit que les pôles des cercles du second système sont aussi sur un même grand cercle, qui d'ailleurs est perpendiculaire au premier; nous retombons donc sur les deux systèmes qui ont été déjà indiqués.

Si l'une des dérivées

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ia}\right)'}\right]', \quad \left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'$$

la première par exemple n'est pas nulle, on aura, en divisant l'équation (42) par cette dérivée et différentiant le résultat par rapport à t,

$$o = \sin i\beta' \left\{\frac{\left[\frac{\left(\frac{\sin ib}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'}{\left[\frac{\left(\frac{\cos a}{c\cos ib}\right)'}{\left(\frac{\sin a}{c\cos ib}\right)'}\right]'}\right\}' = o,$$

c'est-à-dire

$$\beta = o \quad \text{ou bien} \quad \sin ib = m\cos a + n\sin a + pc\cos ib.$$

m, n et p étant des constantes. La première condition donne

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

par l'équation (42), et puis

$$\alpha = o$$

par l'équation (41), résultat absurde. La seconde condition donne

$$\cos\alpha = m\sin i\beta$$

par l'équation (42); puis

$$\sin\alpha = n\sin i\beta$$

par l'équation (41); puis enfin

$$\gamma\cos i\beta + p\sin i\beta = o,$$

à cause de l'équation (39), résultat inadmissible aussi, car on en déduirait que α, β et γ sont constants.

En résumé, il n'existe donc que deux systèmes de séries de cercles,

tracés sur la sphère, respectivement orthogonaux : 1° le système formé par des méridiens et les parallèles correspondants; 2° le système formé par les deux séries de cercles

$$(43)\qquad \begin{cases} \cos x = \alpha \cos i(y-m), \\ \sin x = \beta i \sin i(y-m). \end{cases}$$

Les surfaces dont les lignes de courbure ont pour transformées sphériques les méridiens et les parallèles sont évidemment celles qui ont été étudiées au § III; il ne nous reste donc à nous occuper que de celles dont les lignes de courbure ont pour transformées sphériques les cercles représentés par les équations (43).

Or les équations (43), dans lesquelles α et β sont des constantes, sont les intégrales respectives des équations différentielles

$$(44)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} x\, dx = i \operatorname{tang} i(y-m)\, dy, \\ \cot x\, dx = i \cot i(y-m)\, dy; \end{cases}$$

d'ailleurs nous avons trouvé pour l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface quelconque

$$(23)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

x et y ayant évidemment la même signification que dans les équations (44); donc si nous exprimons que les deux équations (44) équivalent à l'équation (23), ce qui donne

$$v[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y-m)] + (u-w)\operatorname{tang} x\, i \operatorname{tang} i(y-m) = 0,$$

ou bien

$$(45)\quad s[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y-m)] + (r-t+z)\operatorname{tang} x\, i \operatorname{tang} i(y-m) = 0,$$

en remplaçant u, v, w par leurs valeurs indiquées au § I de la première partie; nous aurons l'équation aux différentielles partielles du second ordre en z, x, y des surfaces cherchées.

Pour intégrer l'équation (45), nous allons d'abord substituer aux

variables indépendantes x et y les variables α et β. Pour cela observons que l'on a

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dy};$$

mais les équations (43) donnent par la différentiation

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos i(y-m)}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha i \operatorname{tang} i(y-m),$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\cos x}{i \sin i(y-m)}, \quad \frac{d\beta}{dy} = \frac{\beta}{i \operatorname{tang} i(y-m)},$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \frac{d\beta}{dy} = \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

car

$$i\sin i(y-m) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \cos i(y-m) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos x = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin x = \frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

donc

$$p = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dz}{d\beta},$$

$$q = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dz}{d\beta}.$$

On trouve de la même manière

$$r = -\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dp}{d\alpha} + \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dp}{d\beta},$$

$$s = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dp}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dp}{d\beta},$$

$$t = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\frac{dq}{d\alpha} + \frac{\beta\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{dq}{d\beta},$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp}{d\beta}$, $\frac{dq}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\beta}$ par leurs valeurs,

$$r = \beta^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2}\frac{d^2z}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} + \alpha^2\frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2}\frac{d^2z}{d\beta^2} - \alpha\frac{dz}{d\alpha} - \beta\frac{dz}{d\beta}.$$

$$s = -\alpha\beta\frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2}\frac{d^2z}{d\alpha^2} - (\beta^2-\alpha^2)\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} + \alpha\beta\frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2}\frac{d^2z}{d\beta^2}$$
$$- \beta\frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2}\frac{dz}{d\alpha} + \alpha\frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2}\frac{dz}{d\beta},$$

$$t = \alpha^2\frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2}\frac{d^2z}{d\alpha^2} + 2\alpha\beta\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} + \beta^2\frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2}\frac{d^2z}{d\beta^2}$$
$$+ \alpha\left(2\frac{1-\alpha^2}{1+\beta^2} - 1\right)\frac{dz}{d\alpha} + \beta\left(2\frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} - 1\right)\frac{dz}{d\beta};$$

substituant dans l'équation (45), qui revient à

$$(r - t + z)\,\alpha\beta + s\,(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

on trouve

$$(46)\quad \frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}\frac{dz}{d\alpha} + \frac{\alpha(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}\frac{dz}{d\beta} - \frac{\alpha\beta z}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = 0.$$

Pour déduire de cette équation la valeur de z, je remarque qu'en ajoutant et en retranchant, dans le premier membre,

$$z\,\frac{d.}{d\alpha}\,\frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)},$$

on peut écrire

$$\frac{d.\left[\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}z\right]}{d\alpha} + \frac{\alpha(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}\left[\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}z\right] = 0$$

Intégrant par rapport à α, on a

$$\frac{dz}{d\beta} + \frac{\beta(1-\alpha^2)}{(1+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}z = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}}\,\varphi(\beta),$$

$\varphi(\beta)$ représentant une fonction arbitraire de β. Intégrant de nouveau

par rapport à β, il vient

$$z = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}[F(\alpha) + F_1(\beta)],$$

$F(\alpha)$ et $F_1(\beta)$ étant des fonctions arbitraires de α et de β.

La valeur de z étant connue en fonction de α et de β et par suite en fonction de x et de y d'après les égalités (44), on pourrait se servir des égalités (4) pour calculer les coordonnées rectangles ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface en fonction de x et de y, et de là on passerait ensuite aux valeurs de ξ, η, ζ en α et β; mais on arrive directement, et d'une manière plus simple, comme il suit. L'équation du plan tangent à nos surfaces est

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z.$$

Substituons à $z, \cos x, \sin x, i\sin iy$ leurs valeurs en α et β, il viendra

$$X\alpha\sqrt{1+\beta^2} + Y\beta\sqrt{1-\alpha^2} + Z(\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2})$$
$$= -\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}[F(\alpha) + F_1(\beta)],$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ par α et $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$ par β,

$$\alpha X + \beta Y + (i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2} + \cos im.\sqrt{1-\beta^2})Z = F(\alpha) + F_1(\beta),$$

les fonctions arbitraires $F(\alpha)$ et $F_1(\beta)$ ayant, bien entendu, changé de forme. Or les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface doivent vérifier cette équation du plan tangent et ses dérivées partielles relatives à α et à β; on a donc les trois équations

$$\alpha\xi + \beta\eta + (i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2} + \cos im.\sqrt{1-\beta^2})\zeta = F(\alpha) + F_1(\beta),$$

$$\xi + \frac{\alpha i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = F'(\alpha),$$

$$\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = F'_1(\beta),$$

pour déterminer complétement les coordonnées ξ, η, ζ en fonction de α et de β; à la place de la première de ces équations, on peut prendre celle-ci

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta = F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) + F_1(\beta) - \beta F'_1(\beta),$$

qui résulte de l'élimination de ξ et de η, et on obtient le système plus simple

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta = F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) + F_1(\beta) - \beta F'_1(\beta),\\ &\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = F'(\alpha),\\ &\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = F'_1(\beta). \end{aligned}\right.$$

Évaluons l'élément linéaire *ds* de la surface, élément dont la connaissance est nécessaire dans l'étude des propriétés géodésiques.

En différentiant les équations (47) et posant, pour simplifier,

$$F(\alpha) - \alpha F'(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad F_1(\beta) - \beta F'_1(\beta) = \varphi_1(\beta),$$

on trouve celles-ci

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\zeta = \left[\varphi'(\alpha) + \frac{\alpha i \sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha$$

$$+ \left[\varphi'_1(\beta) - \frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta,$$

$$d\xi + \frac{\alpha i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}d\zeta = -\frac{1}{\alpha}\left[\varphi'(\alpha) + \frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha,$$

$$d\eta - \frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}d\zeta = -\frac{1}{\beta}\left[\varphi'_1(\beta) - \frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta,$$

qui reviennent à

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\zeta=\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha$$
$$+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\xi=\frac{-\alpha i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$
$$\times\left\{\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta\right\}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)d\eta=\frac{\beta\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\times\left\{\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\alpha+\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta\right\}$$
$$-\frac{1}{\beta}\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]d\beta.$$

Faisant la somme des carrés membre à membre et supprimant le facteur $\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$, il vient

$$ds^2=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\left[\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha i\sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]^2d\alpha^2+\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\left[\varphi'_1(\beta)-\frac{\beta\cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta\right]^2d\beta^2.$$

où ζ doit encore être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\zeta=\varphi(\alpha)+\varphi_1(\beta),$$

si l'on veut avoir ds en fonction des deux variables indépendantes α et β. La valeur de ds^2 peut se mettre sous une autre forme : de l'é-

quation qui détermine ζ on déduit

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{d\zeta}{d\alpha} = \varphi'\alpha + \frac{\alpha i \sin im}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta,$$

$$\left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{d\zeta}{d\beta} = \varphi_1'\beta - \frac{\beta \cos im}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta,$$

donc on a

$$ds^2 = \left(\frac{i\sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \left[\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\left(\frac{d\zeta}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{d\zeta}{d\beta}\right)^2 d\beta^2\right].$$

La valeur de ds, quoique d'une forme assez élégante, est néanmoins trop compliquée pour qu'on puisse, dans le cas général, se proposer, avec quelques chances de succès, la détermination des lignes isométriques, des lignes géodésiques, etc.; mais dans certains cas particuliers toutes ces questions deviennent abordables. Je me bornerai à signaler le cas où l'on a

$$\varphi\alpha = \cos im . \sqrt{1+\alpha^2}, \quad \varphi_1\beta = i\sin im . \sqrt{1-\beta^2},$$

et celui où

$$\varphi\alpha = \frac{\sin^2 im}{1+\alpha^2}, \quad \varphi_1\beta = \frac{\cos^2 im}{1-\beta^2}.$$

VIII. — Surfaces d'étendue minimum (*).

Les surfaces d'étendue minimum sont celles dont les rayons de courbure principaux ont en chaque point des valeurs égales et de signes contraires. On a donc pour ces surfaces, d'après l'équation (25),

(48) $$u + w = 0,$$

(*) Quelques-uns des résultats contenus dans ce paragraphe, à savoir : 1° l'intégrale générale sous forme réelle ; 2° les surfaces d'étendue minimum algébriques ; 3° la surface d'étendue minimum du genre hélicoïde, constituent le but principal des recherches que M. Catalan a présentées en 1855 à l'Académie des Sciences et qu'il a ensuite publiées dans le tome XXXVII du *Journal de l'École Polytechnique*. Je crois devoir faire observer que j'avais donné tous ces résultats, dès 1853 dans le tome XXXVII des *Comptes rendus*, page 531. Du reste M. Catalan a bien voulu reconnaître, dans une note placée en tête de son Mémoire, mes droits à la priorité.

ou bien

$$(48\ bis) \qquad t + r + i\,\text{tang}\,iy . q + z = 0.$$

L'équation précédente s'intègre sans difficulté par la méthode de Monge, mais on est conduit à des résultats plus simples en partant de l'équation qui détermine ζ.

Différentions l'équation (48) par rapport à y ; en se rappelant que

$$u = \int \left(\cos iy \frac{d^2\zeta}{dx^2} + i \sin iy \frac{d\zeta}{dy}\right) dy, \quad w = \cos iy \frac{d\zeta}{dy},$$

on trouve

$$(49) \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

équation bien connue et dont l'intégrale générale est

$$(50) \qquad \zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

f et f_1 étant des fonctions réelles ou imaginaires; ou mieux, en évitant la forme imaginaire,

$$(51) \quad \zeta = \frac{1}{2}[\varphi(x + iy) + \varphi(x - iy)] + \frac{i}{2}[\varphi_1(x + iy) - \varphi_1(x - iy)],$$

φ et φ_1 étant des fonctions réelles. Observons toutefois que l'équation (49) est plus générale que l'équation (48), et que lorsque nous déduirons z de la valeur de ζ fournie par l'équation (50) au moyen de la relation $z = \int \zeta \cos iy\, dy$, il faudra déterminer la fonction arbitraire de x introduite par l'intégration, de façon que $u + w = 0$.

Indiquons dès à présent et d'une manière générale comment se fait le calcul de cette fonction de x. Je pose

$$z = \int_0^y \zeta \cos iy\, dy + X,$$

j'aurai

$$u = \frac{d^2 z}{dx^2} + i\,\text{tang}\,iy . \frac{dz}{dy} + z = \int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy$$
$$+ \int_0^y \zeta \cos iy\, dy + \zeta\, i \sin iy + X'' + X,$$

mais puisque

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

on a

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy = -\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dy^2} \cos iy\, dy,$$

et, en intégrant par parties deux fois de suite dans le second membre,

$$\int_0^y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \cos iy\, dy = -\frac{d\zeta}{dy}\cos iy + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 - \zeta i \sin iy - \int_0^y \zeta \cos iy\, dy.$$

$\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0$ désignant ce que devient $\frac{d\zeta}{dy}$ pour $y = 0$; donc

$$u = -\frac{d\zeta}{dy}\cos iy + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 + X'' + X;$$

par conséquent, si l'on veut que la condition $u + w = 0$ soit satisfaite, il faudra que

$$X'' + X + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 = 0,$$

ce qui donne

$$X = C\cos x + C'\sin x + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha, 0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha,$$

en représentant par $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha, 0}$ la valeur que prend $\frac{d\zeta}{dy}$ pour $x = \alpha$ et $y = 0$.

Ainsi on a

$$(52)\quad z = C\cos x + C'\sin x + \int_0^y \cos iy\, \zeta\, dy + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha, 0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha.$$

expression dans laquelle on pourra toujours laisser de côté les termes en $\cos x$ et en $\sin x$ qui n'influent, comme on sait, que sur la position de la surface par rapport aux axes.

Appliquons les formules précédentes à la recherche de quelques surfaces simples. Posons

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(a - ib)(x + iy), \quad f_1(x - iy) = \frac{1}{2}(a + ib)(x - iy),$$

a et b étant des constantes réelles et qu'on pourra toujours supposer positives; nous aurons

$$\zeta = ax + by,$$

puis

$$\int_0^y \zeta \cos iy\, dy = -(ax+by)\, i \sin iy - b \cos iy + b.$$

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha = b\cos x - b,$$

et, par suite,

$$z = (C+b)\cos x + C' \sin x - (ax+by)\, i\sin iy - b\cos iy,$$

ou simplement

$$z = -(ax+by)\, i \sin iy - b\cos iy,$$

en laissant de coté des termes inutiles. Portant cette valeur dans les équations (4 *bis*), on a celles-ci

$$r\cos(\omega - x) = b\cos iy,$$
$$r\sin(\omega - x) = ai \sin iy,$$
$$\zeta = ax + by,$$

pour déterminer les coordonnées polaires r et ω et la coordonnée rectiligne ζ des différents points de la surface. Si $a = 0$, on trouve

$$r = b\cos\frac{i\zeta}{b},$$

c'est-à-dire la surface de révolution engendrée par une chaînette. Si $b = 0$, on a

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\zeta}{a},$$

c'est-à-dire l'hélicoïde gauche à plan directeur. Dans le cas général où a et b sont positifs quelconques, la surface admet la génération suivante :

Considérons dans le plan des (ξ, η) l'hyperbole représentée par l'équation

$$\left(\frac{\xi}{b}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{a}\right)^2 = 1$$

et prenons la branche située du côté des ξ positifs pour base d'un cylindre parallèle aux ζ. Sur ce cylindre traçons une courbe telle, que la coordonnée ζ de l'un quelconque de ses points M, soit dans un rapport constant égal à $-\frac{2}{a}$, avec le secteur hyperbolique compté à partir du demi-axe réel qui aboutit au sommet ($\xi = b$, $\eta = 0$), et terminé au demi-diamètre qui aboutit à la projection du point M sur le plan des (ξ, η); enfin donnons à cette espèce d'hélice hyperbolique, un mouvement hélicoïdal direct autour de l'axe des ζ, de façon que les hélices circulaires décrites par ses différents points aient toutes $2\pi a$ pour pas; la surface ainsi obtenue sera la surface d'étendue minimum considérée.

Faisons encore

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}e^{-in(x+iy)}, \quad f_1(x-iy) = \frac{1}{2}e^{in(x-iy)};$$

nous aurons $\zeta = e^{ny}\cos nx$, puis

$$\int_0^y \zeta \cos iy\, dy = \frac{1}{2}\cos nx \int_0^y (e^y + e^{-y})e^{ny}\, dy$$

$$= \frac{\cos nx}{2(n+1)}(e^{(n+1)y} - 1) + \frac{\cos nx}{2(n-1)}(e^{(n-1)y} - 1),$$

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha = n\int_0^x \sin(\alpha - x)\cos n\alpha\, d\alpha$$

$$= -\frac{n\cos nx}{2(n+1)} + \frac{n\cos nx}{2(n-1)} + \frac{n\cos x}{2(n+1)} - \frac{n\cos x}{2(n-1)},$$

d'où

$$z = \frac{e^{(n+1)y}\cos nx}{2(n+1)} + \frac{e^{(n-1)y}\cos nx}{2(n-1)}.$$

Par conséquent les équations (4) qui déterminent les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la surface deviendront

$$\xi\cos x + \eta\sin x = \frac{n\cos nx}{2}\left[\frac{e^{(n+1)y}}{n+1} - \frac{e^{(n-1)y}}{n-1}\right],$$

$$\xi\sin x - \eta\cos x = -\frac{n\sin nx}{2}\left[\frac{e^{(n+1)y}}{n+1} + \frac{e^{(n-1)y}}{n-1}\right],$$

$$\zeta = e^{ny}\cos nx.$$

Si on éliminait x et y entre ces trois équations, il est évident que le résultat contiendrait ξ, η, ζ sous forme algébrique; donc la surface d'étendue minimum que nous venons d'obtenir est algébrique. On peut avoir autant de surfaces de cette nature que l'on veut en posant

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (A_1+iB_1)\,e^{in_1(x+iy)} + (A_2+iB_2)\,e^{in_2(x+iy)} \\ &\quad + (A_3+iB_3)\,e^{in_3(x+iy)} + \ldots, \\ f(x-iy) &= (A_1-iB_1)\,e^{-in_1(x-iy)} + (A_2-iB_2)\,e^{-in_2(x-iy)} \\ &\quad + (A_3-iB_3)\,e^{-in_3(x-iy)} + \ldots, \end{aligned}$$

A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... étant des nombres réels quelconques et n_1, n_2, n_3, ... des nombres réels tous différents de -1 et de $+1$.

Nous ne pousserons pas plus loin la recherche des surfaces d'étendue minimum particulières. Cette question, qui a été l'objet de plusieurs travaux, pouvait avoir de l'intérêt quand on ne connaissait que l'intégrale si compliquée de Monge; mais elle n'offre plus maintenant la moindre difficulté, puisque nous avons par ce qui précède un résultat entièrement débarrassé d'imaginaires. Proposons-nous plutôt de déterminer les fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation générale des surfaces d'étendue minimum de manière que ces surfaces remplissent certaines conditions géométriques; et pour faciliter la solution de ces nouveaux problèmes, établissons d'abord quelques propriétés et quelques formules générales.

Une surface d'étendue minimum est entièrement déterminée de forme, mais non de position, par les deux équations

$$(50)\qquad \zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy),$$

$$(48)\qquad u + w = 0.$$

En effet, connaissant ζ en fonction de x et de y, on a, par cela même,

$$v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}, \quad w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy},$$

puis u, qui est égal à $-\cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy}$, d'après l'équation (48). Or on sait que lorsque u, v et w sont connus, la surface est déterminée, sauf cependant trois constantes qui permettent de déplacer la surface comme on veut parallèlement à elle-même.

La condition (48), introduite dans l'expression du carré de l'élément linéaire de la surface, réduit ce carré à

$$(53)\quad ds^2 = (v^2 + w^2)(dx^2 + dy^2) = \cos^2 iy \left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 \right] (dx^2 + dy^2),$$

cette dernière égalité prouve que non-seulement les méridiens et les parallèles sont orthogonaux, mais encore que ces lignes forment un double système isométrique. D'une manière plus générale, on peut dire que deux séries de lignes tracées sur la surface qui ont pour transformées sphériques deux séries de lignes sphériques orthogonales et isothermes, sont des lignes isométriques de la surface. On s'assurera de l'exactitude de ce résultat, en se rapportant à la règle que nous avons donnée au § XIII de la première Partie pour déterminer les lignes isométriques d'une surface quelconque.

Déterminons les lignes de courbure des surfaces d'étendue minimum ; à cet effet, portons les valeurs de u, v, w, qui sont ici

$$u = -w = -i\cos iy\,[f'(x+iy) - f'_1(x-iy)],$$
$$v = \cos iy\,[f'(x+iy) + f'_1(x-iy)],$$
$$w = i\cos iy\,[f'(x+iy) - f'_1(x-iy)],$$

dans l'équation générale (23)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u-w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

et il viendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2i\frac{f'(x+iy) - f'_1(x-iy)}{f'(x+iy) + f'_1(x-iy)}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Cette dernière équation s'intègre, quelles que soient les fonctions f et f_1, ainsi que l'a fait voir pour la première fois M. Michaël Roberts. Posons, en effet,

$$x + iy = x_1, \quad x - iy = y_1,$$

d'où

$$dx^2 - dy^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{2}, \quad 2i\,dx\,dy = \frac{dx_1^2 - dy_1^2}{2},$$

nous aurons

$$[f'(x_1)+f'_1(y_1)](dx_1^2+dy_1^2)+[f'(x_1)-f'_1(y_1)](dx_1^2-dy_1^2)=0,$$

ou bien

$$f'(x_1)\,dx_1^2+f'_1(y_1)\,dy_1^2=0,$$

d'où

$$(54)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1=\pm i\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1+C.$$

On peut observer que les lignes de courbure forment deux séries de lignes isométriques.

Cherchons, en second lieu, les lignes asymptotiques.

L'équation de ces lignes est, pour une surface quelconque,

$$w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2v\frac{dy}{dx}+u=0;$$

en remplaçant u, v, w par les valeurs qui se rapportent aux surfaces considérées, il vient

$$\begin{gathered}[f'(x+iy)-f'_1(x-iy)](dy^2-dx^2)\\ -2i[f'(x+iy)+f'_1(x-iy)]\,dxdy=0,\end{gathered}$$

et, en introduisant les variables x_1 et y_1,

$$[f'(x_1)-f'_1(y_1)](dy_1^2+dx_1^2)+[f'(x_1)+f'_1(y_1)][(dx_1^2-dy^2)=0,$$

ou

$$f'(x_1)\,dx_1^2=f'_1(y_1)\,dy_1^2,$$

d'où

$$(55)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1=\pm\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1+C.$$

Ainsi la détermination des lignes asymptotiques se ramène aux quadratures comme celle des lignes de courbure; de plus ces quadratures sont les mêmes pour les deux systèmes de lignes.

Déterminons encore l'angle θ sous lequel une ligne quelconque tracée sur une surface d'étendue minimum, coupe les lignes de plus grande pente.

Nous avons trouvé d'une manière générale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\cos\theta - v\sin\theta}{w\sin\theta - v\cos\theta};$$

or, pour les surfaces considérées, $u = -w$, donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-w\cos\theta - v\sin\theta}{w\sin\theta - v\cos\theta},$$

de là on tire

$$\frac{dx+idy}{dx-idy} = \frac{-iw(\cos\theta + i\sin\theta) - v(\cos\theta + i\sin\theta)}{iw(\cos\theta - i\sin\theta) - v(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(v+iw)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(v-iw)(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{v+iw}{v-iw}e^{2i\theta},$$

ou bien enfin

(56) $$\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta},$$

en introduisant les variables x_1 et y_1.

La formule précédente donne aisément l'angle formé par deux courbes quelconques. Soit en effet $\frac{dx_1}{dy_1}$ le rapport différentiel des variables x_1 et y_1 pour la première courbe, $\frac{\delta x_1}{\delta y_1}$ le même rapport pour la seconde courbe, au point x_1, y_1 où les courbes se coupent, nous aurons

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta},$$

$$\frac{\delta x_1}{\delta y_1} = \frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta_1},$$

θ et θ_1 étant les angles sous lesquels la première et la seconde courbe coupent la ligne de plus grande pente. Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}} = e^{2i(\theta-\theta_1)},$$

et comme l'angle ω que forment les deux courbes est égal à $\theta - \theta_1$, on

obtient

$$(57)\qquad \frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}} = e^{2i\omega}.$$

Si les lignes considérées sont une ligne de courbure et une ligne asymptotique, on aura

$$\frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\delta x_1}{\delta y_1}} = i,$$

et par suite $\omega = \frac{\pi}{4}$, ce qui pourrait être établi directement au moyen des propriétés de l'indicatrice. On déduit aussi de l'équation (54), que les équations des lignes qui coupent sous un angle constant les lignes de courbure ou les lignes asymptotiques, sont

$$(58)\qquad \int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1 = m\int\sqrt{f'_1(y_1)}\,dy_1 + \mathrm{C},$$

de telle sorte que la détermination de ces lignes dépend des deux mêmes quadratures qui font connaître les lignes de courbures et les lignes asymptotiques.

Cherchons enfin les lignes géodésiques. Ces lignes sont définies par les deux équations

$$d\theta = -i\,\mathrm{tang}\,iy\,dx,\quad \frac{dx_1}{dy_1} = \frac{f'_1(y_1)}{f'(x_1)}e^{2i\theta}:$$

la première équation, en substituant à y et à x leurs valeurs en x_1 et y_1, devient

$$2d\theta = -i\,\mathrm{tang}\frac{x_1-y_1}{2}(dx_1+dy_1) = -\frac{e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} - e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}}{e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} + e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}}(dx_1+dy_1)$$

$$= -\frac{e^{ix_1} - e^{iy_1}}{e^{ix_1} + e^{iy_1}}(dx_1+dy_1),$$

ou bien

$$2\,d\theta = i\frac{x_2 - y_2}{x_2 + y_2}\left(\frac{dx_2}{x_2} + \frac{dy_2}{y_2}\right),$$

en faisant

$$e^{ix_1} = x_2, \quad e^{iy_1} = y_2.$$

Quant à la seconde équation, si l'on pose

$$f(x_1) = f(-i\log x_2) = \varphi(x_2),$$
$$f_1(y_1) = f_1(-i\log y_2) = \varphi_1(y_2),$$

elle revient d'abord à

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \frac{\varphi_1'(y_2)}{\varphi'(x_2)}e^{2i\theta};$$

prenons les logarithmes et différentions par rapport à y_2, nous aurons

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\varphi_1''(y_2)}{\varphi_1'(y_2)} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} + 2i\frac{d\theta}{dy_2},$$

d'où, en remplaçant $\dfrac{d\theta}{dy_2}$ par sa valeur,

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\varphi_1''(y_2)}{\varphi_1'(y_2)} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} - \frac{x_2 - y_2}{x_2(x_2 + y_2)}\frac{dx_2}{dy_2} - \frac{x_2 - y_2}{y_2(x_2 + y_2)}.$$

Pour simplifier encore, je fais

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \omega\frac{\varphi_1'(y_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{x_2}{y_2},$$

ce qui donne

$$\frac{\dfrac{d^2x_2}{dy_2^2}}{\dfrac{dx_2}{dy_2}} = \frac{\dfrac{d\omega}{dy_2}}{\omega} + \frac{\varphi_1''(y_2)}{\varphi_1'(y_2)} - \frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{\dfrac{dx_2}{dy_2}}{x_2} - \frac{1}{y_2}.$$

et j'obtiens

$$\frac{\frac{d\omega}{dy_2}}{\omega} = -\frac{2\frac{dx_2}{dy_2}}{x_2+y_2} + \frac{2}{x_2+y_2}.$$

Posant enfin

$$\frac{\varphi'(x_2)\,dx_2}{x_2} = dx_3, \quad \frac{\varphi'_1(y_2)\,dy_2}{y_2} = dy_3,$$

d'où

$$x_2 = \psi(x_3)$$

et

$$y_2 = \psi_1(y_3),$$

on a

$$(59) \qquad \frac{dx_3}{dy_3} = \omega, \quad \frac{d\omega}{\omega} = 2\,\frac{\psi'_1(y_3)\,dy_3 - \psi'(x_3)\,dx}{\psi_1(y_3)+\psi(x_3)},$$

et par conséquent

$$(60) \qquad \frac{d^2x_3}{dy_3^2}[\psi_1(y_3) + \psi(x_3)] = 2\psi'_1(y_3)\frac{dx_3}{dy_3} - 2\psi'(x_3)\left(\frac{dx_3}{dy_3}\right)^2.$$

Les deux équations simultanées du premier ordre (59), ou bien l'équation du second ordre (60), définissent les lignes géodésiques des surfaces d'étendue minimum. Ces équations, quoique d'une forme assez élégante, ne paraissent pas pouvoir être intégrées sans particulariser les fonctions ψ et ψ_1.

Nous joindrons encore aux formules précédentes celle qui donne l'élément lineaire ds de la surface en fonction des variables x_3 et y_3. Nous avons trouvé plus haut

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2 iy \left[\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right](dx^2 + dy^2) \\ &= 4\cos^2 iy\, f'(x+iy)\, f_1'(x-iy)(dx^2 + dy^2), \end{aligned}$$

et de là on tire, en introduisant les variables x_1 et y_1,

$$ds^2 = \left[e^{\frac{i(x_1-y_1)}{2}} + e^{-\frac{i(x_1-y_1)}{2}}\right]^2 f'(x_1)f_1'(y_1)\,dx_1\,dy_1;$$

remplaçant e^{ix_1} par x_2, e^{iy_1} par y_2, on a encore

$$ds^2 = \left[\sqrt{\frac{x_2}{y_2}} + \sqrt{\frac{y_2}{x_2}}\right]^2 \varphi'(x_2)\varphi'_1(y_2)\,dx_2\,dy_2$$

$$= (x_2 + y_2)^2 \frac{\varphi'(x_2)}{x_2}\frac{\varphi'_1(y_2)}{y_2}\,dx_2\,dy_2,$$

puis enfin

(61) $$ds^2 = [\psi(x_3) + \psi_1(y_3)]^2\,dx_3\,dy_3.$$

Occupons-nous maintenant de la recherche des surfaces d'étendue minimum qui remplissent certaines conditions géométriques.

Cherchons, en premier lieu, celles de ces surfaces qui sont de révolution ou plus généralement qui ont leurs lignes de première courbure dans des plans parallèles au plan des (ξ, η). On doit avoir pour ces surfaces

$$\zeta = \varphi(y) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{d\zeta}{dx} = 0,$$

et, en même temps,

$$\zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy);$$

de là on déduit

$$f'(x + iy) + f_1'(x - iy) = 0,$$

d'où

$$f'(x + iy) = a + ib, \quad f_1'(x - iy) = -(a + ib),$$

a et b étant des constantes réelles, par conséquent

$$f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$

$$f_1(x - iy) = -(a + ib)(x - iy) + e + if,$$

c, d, e, f étant quatre nouvelles constantes réelles; on a donc

$$\zeta = 2(a + ib)iy + c + e + i(d + f)$$

ou simplement

$$\zeta = -2by,$$

puisque ζ doit être réel et que la suppression d'une constante dans la

valeur de ζ ne produit qu'un déplacement de la surface parallèlement aux ζ. On conclut de là que les surfaces cherchées se réduisent à la surface de révolution qui a pour méridienne une chaînette.

Déterminons, en second lieu, les surfaces d'étendue minimum qui peuvent être engendrées par le mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ d'une courbe plane ou gauche. On a pour ces surfaces, d'abord

$$\frac{d\zeta}{dx} = m,$$

m étant une constante reelle, et puis

$$\zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy);$$

de là on déduit

$$f'(x + iy) + f'_1(x - iy) = m.$$

par suite

$$f'(x + iy) = a + ib, \quad f'_1(x - iy) = m - (a + ib),$$

d'où

$$f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$
$$f_1(x - iy) = (m - a - ib)(x - iy) + e + if.$$

d'où

$$\zeta = m(x - iy) + 2iy(a + ib) + c + e + i(d + f),$$

ou simplement

$$\zeta = mx - 2by,$$

ce qui donne la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une hélice hyperbolique, surface que nous avons indiquée précédemment.

Cherchons encore les surfaces gauches d'étendue minimum.

Pour qu'une surface soit gauche, il faut et il suffit que les lignes asymptotiques de l'un des systèmes soient des droites : or la transformée sphérique d'une droite, quelle que soit la surface sur laquelle cette droite est tracée, est un grand cercle ; on conclut de là que les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont dans toute surface gauche

représentées par les équations

$$\cos(x-\alpha) = \sin i\beta \sin iy, \quad \beta = \varphi(\alpha),$$

qui conviennent à un système quelconque de grands cercles. De ces équations on déduit, en différentiant deux fois,

$$-\cos(x-\alpha) = \sin i\beta \sin iy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i \sin i\beta \cos iy \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou

$$-\cos(x-\alpha) = \cos(x-\alpha)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + i\cos(x-\alpha)\cot iy \frac{d^2y}{dx^2};$$

d'où

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) i \operatorname{tang} iy = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\left(1-\frac{dx_1}{dy_1}\right)\frac{dx_1}{dy_1}\operatorname{tang}\frac{x_1-y_1}{2} = -\frac{d^2x_1}{dy_1^2},$$

en introduisant les deux variables x_1 et y_1 et prenant la seconde comme variable indépendante.

Maintenant nous avons vu précédemment que les équations des lignes asymptotiques d'une surface d'étendue minimum pour laquelle

$$z = f(x+iy) + f_1(x-iy) = f(x_1) + f_1(y_1),$$

sont

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \pm\frac{\sqrt{f'_1(y_1)}}{\sqrt{f'(x_1)}};$$

donc si nous posons

$$\sqrt{f'(x_1)} = \frac{1}{X_1}, \quad \pm\sqrt{f'_1(y_1)} = \frac{1}{Y_1},$$

nous aurons

$$\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{X_1}{Y_1};$$

d'où

$$\frac{\frac{d^2x_1}{dy_1^2}}{\frac{dx_1}{dy_1}} = \frac{X'_1}{X_1}\frac{dx_1}{dy_1} - \frac{Y'_1}{Y_1}.$$

En rapprochant cette équation de celle qui a été obtenue plus haut, on voit que pour que la surface d'étendue minimum soit gauche, il faut et il suffit que l'on ait, Y_1 étant réduit à l'une de ses deux valeurs,

$$\left(1 + \frac{X_1}{Y_1}\right) \operatorname{tang} \frac{x_1 - y_1}{2} = -\frac{X'_1}{Y_1} + \frac{Y'_1}{Y_1},$$

c'est-à-dire

$$(Y_1 + X_1)(e^{ix_1} - e^{iy_1}) = i(Y'_1 - X'_1)(e^{ix_1} + e^{iy_1}),$$

ou bien

$$(62) \quad e^{ix_1}(Y_1 + X_1 - iY'_1 + iX'_1) = e^{iy_1}(Y_1 + X_1 + iY'_1 - iX'_1);$$

différentions par rapport à x_1, puis par rapport à y_1, il vient

$$e^{ix_1}(Y_1 - iY'_1)' = e^{iy_1}(X_1 - iX'_1)',$$

ce qui exige que

$$(Y_1 - iY'_1)' = 2ime^{iy_1}, \quad (X_1 - iX'_1)' = 2ime^{ix_1},$$

m étant une constante réelle ou imaginaire, et par suite que

$$Y_1 - iY'_1 = 2me^{iy_1} + 2\alpha,$$
$$X_1 - iX'_1 = 2me^{ix_1} + 2\beta,$$

α et β étant deux nouvelles constantes de même nature. Portant ces valeurs dans l'équation (62), on a

$$e^{ix_1}(X_1 + iX'_1 + 2\alpha) = e^{iy_1}(Y_1 + iY'_1 + 2\beta),$$

d'où

$$X_1 + iX'_1 = 2ne^{-ix_1} - 2\alpha,$$
$$Y_1 + iY'_1 = 2ne^{-iy_1} - 2\beta.$$

Rapprochant ces deux égalités des précédentes, on trouve

$$X_1 = me^{ix_1} + ne^{-ix_1} + \beta - \alpha,$$
$$iX'_1 = ne^{-ix_1} - me^{ix_1} - \alpha - \beta,$$
$$Y_1 = me^{iy_1} + ne^{-iy_1} + \alpha - \beta,$$
$$iY'_1 = ne^{-iy_1} - me^{iy_1} - \alpha - \beta,$$

ce qui ne peut être qu'autant que l'on a

$$\alpha + \beta = 0,$$

et par suite

$$X_1 = me^{ix_1} + ne^{-ix_1} - 2\alpha,$$
$$Y_1 = me^{iy_1} + ne^{-iy_1} + 2\alpha.$$

Reste à déterminer les constantes m, n et α. Pour cela supposons que l'on ait choisi les axes des ξ, η et ζ de façon que l'une des génératrices rectilignes de la surface soit parallèle à l'axe des η, et qu'une seconde génératrice soit parallèle au plan des (ξ, η) et fasse un angle égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec l'axe des ξ. Nous aurons pour la première génératrice

$$x = 0, \quad f(x+iy) + f_1(x-iy) = \text{const},$$

par suite

$$f(iy) + f_1(-iy) = \text{const},$$

d'où

$$f'(iy) = f_1'(-iy);$$

puis, pour la seconde

$$x = k\pi, \quad f(x+iy) + f_1(x-iy) = \text{const},$$

par suite

$$f(k\pi + iy) + f_1(k\pi - iy) = \text{const},$$

d'où

$$f'(k\pi + iy) = f_1'(k\pi - iy).$$

De là on déduit, en se rappelant les relations qui lient $f'(x_1)$ et $f_1'(y_1)$ à X_1 et Y_1,

$$(me^{-y} + ne^{y} - 2\alpha)^2 = (me^{y} + ne^{-y} + 2\alpha)^2,$$
$$(me^{ik\pi-y} + ne^{-ik\pi+y} - 2\alpha)^2 = (me^{ik\pi+y} + ne^{-ik\pi-y} + 2\alpha)^2;$$

la première condition donne

$$m^2 - n^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha(m+n) = 0,$$

et la seconde

$$m^2 e^{4ik\pi} - n^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(me^{2ik\pi} + n) = 0;$$

comme on peut toujours supposer k tel, que l'on n'ait pas $e^{4ik\pi} = 1$, on voit que les conditions précédentes ne peuvent être satisfaites que si $m = n = 0$. Ainsi on a

$$X_1 = -2\alpha, \quad Y_1 = 2\alpha,$$

par suite

$$f'(x_1) = \frac{1}{4\alpha^2}, \quad f'(y_1) = \frac{1}{4\alpha^2}.$$

donc

$$\zeta = (a + ib)(x + iy) + (a + ib)(x - iy) + c + id,$$

a, b, c, d étant des constantes réelles, ou simplement

$$\zeta = 2ax.$$

Par conséquent la seule surface gauche d'étendue minimum est l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Cherchons enfin les surfaces d'étendue minimum qui ont toutes leurs lignes de courbures planes.

On a pour ces surfaces

$$v[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y - m)] + (u - w)\operatorname{tang} x . i \operatorname{tang} i(y - m) = 0$$

et

$$u + w = 0,$$

par conséquent

$$[\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 i(y - m)]\frac{d\zeta}{dx} - 2\operatorname{tang} x . i \operatorname{tang} i(y - m)\frac{d\zeta}{dy} = 0$$

et

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0.$$

La première équation considérée isolément s'intègre sans difficulté.

En effet, en posant conformément à la méthode connue

$$\frac{dx}{\tang^2 x + \tang^2 i(y-m)} = \frac{dy}{-2\tang x . i \tang i(y-n)} = \frac{d\zeta}{0},$$

on trouve d'abord

$$\zeta = C, \quad \cot[x + i(y-m)] = \cot[x - i(y-m)] + C',$$

et puis

$$\zeta = F\{\cot[x + i(y-m)] - \cot[x - i(y-m)]\},$$

pour l'intégrale cherchée.

Déterminons maintenant la fonction arbitraire F par la condition que la valeur de ζ satisfasse à la seconde équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0.$$

En différentiant deux fois par rapport à x et par rapport à y la valeur de ζ, on trouve

$$\frac{d\zeta}{dx} = F' . \left\{ \frac{-1}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{1}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\},$$

$$\frac{d\zeta}{dy} = F' . \left\{ \frac{-i}{\sin^2[x + i(y-m)]} - \frac{i}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = F'' . \left\{ \frac{-1}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{1}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\}^2$$
$$+ 2F' . \left\{ \frac{\cos[x + i(y-m)]}{\sin^3[x + i(y-m)]} - \frac{\cos[x - i(y-m)]}{\sin^3[x - i(y-m)]} \right\},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = F'' \left\{ \frac{i}{\sin^2[x + i(y-m)]} + \frac{i}{\sin^2[x - i(y-m)]} \right\}^2$$
$$+ 2F' \left\{ \frac{-\cos[x + i(y-m)]}{\sin^3[x + i(y-m)]} + \frac{\cos[x - i(y-m)]}{\sin^3[x - i(y-m)]} \right\},$$

F' et F'' étant les dérivées première et seconde de la fonction F par rapport à la variable $\cot[x + i(y-m)] - \cot[x - i(y-m)]$ dont elle dépend. De là on tire

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = -4F'' \frac{1}{\sin^2[x + i(y-m)]\sin^2[x - i(y-m)]}.$$

donc pour que

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

on doit avoir

$$F'' = 0,$$

d'où

$$\zeta = -\frac{ai}{2}\left\{\cot[x + i(y - m)] - \cot[x - i(y - m)]\right\},$$

a étant une constante réelle.

La valeur de ζ étant connue, nous avons encore à calculer z au moyen de la formule

$$z = C\cos x + C'\sin x + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\,d\alpha + \int_0^y \zeta \cos iy\,dy;$$

or on a d'abord

$$\int_0^y \zeta \cos iy\,dy = -\frac{ai}{2}\int_0^y \cos iy \left\{\frac{\cos[x + i(y - m)]}{\sin[x + i(y - m)]} - \frac{\cos[x - i(y - m)]}{\sin[x - i(y - m)]}\right\} dy$$

$$= -\frac{ai}{2}\int_0^y \frac{\cos iy \sin 2i(y - m)}{\cos^2 x - \cos^2 i(y - m)}\,dy,$$

donc, en posant

$$y = m + y_1,$$

il vient

$$\int_0^y \zeta \cos iy\,dy = -ai\int_{-m}^{y_1} \frac{(\cos im \cos iy_1 - \sin im \sin iy_1)\sin iy_1 \cos iy_1}{\cos^2 x - \cos^2 iy_1}\,dy_1$$

$$= a\cos im \int_{-m}^{y_1} \frac{\cos^2 iy_1\, d.\cos iy_1}{\cos^2 x - \cos^2 iy_1} - a\sin im \int_{-m}^{y_1} \frac{\sin^2 iy_1\, d.\sin iy_1}{\sin^2 x - \sin^2 iy_1},$$

et, en observant que, en général,

$$\int \frac{t^2\,dt}{k^2 - t^2} = -\int dt - ki\int \frac{d.\frac{it}{k}}{1 + \left(\frac{it}{k}\right)^2} = -t - ki \operatorname{arc\,tang}\frac{it}{k} + C,$$

on trouve

$$\int_0^{y_1} \zeta \cos iy\, dy = -a\cos im.\cos iy_1 + a\cos^2 im + a\sin im.\sin iy_1 + a\sin^2 im$$

$$- a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos iy_1}{\cos x} + a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos im}{\cos x}$$

$$+ a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{i\sin iy_1}{\sin x} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{i\sin im}{\sin x}$$

$$= a - a\cos iy - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos i(y-m)}{\cos x}$$

$$+ a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos im}{\cos x} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{i\sin i(y-m)}{\sin x}$$

$$- a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{i\sin im}{\sin x}.$$

D'autre part

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha$$

$$= -\frac{a}{2}\int_0^x \sin(\alpha - x)\left[\frac{1}{\sin^2(\alpha - im)} + \frac{1}{\sin^2(\alpha + im)}\right] d\alpha$$

$$= -a\int_0^x \frac{(\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x)(\sin^2\alpha\cos^2 im + \cos^2\alpha\sin^2 im)}{(\cos^2\alpha - \cos^2 im)^2}\, d\alpha$$

$$= a\cos x\int_0^x \frac{\cos^2 im - (\cos^2 im - \sin^2 im)\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \cos^2 im)^2}\, d.\cos\alpha$$

$$+ a\sin x\int_0^x \frac{\sin^2 im + (\cos^2 im - \sin^2 im)\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha - \sin^2 im)^2}\, d.\sin\alpha,$$

et, en effectuant les intégrations qui n'offrent aucune difficulté,

$$\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha$$

$$= -a\frac{\sin^2 im.\cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^2 im} - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos x}{\cos im}$$

$$- a\frac{\cos^2 im.\sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^2 im} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{\sin x}{i\sin im}$$

$$= -a - a\cos x.\cos im.i\,\text{arc tang}\frac{i\cos x}{\cos im} + a\sin x.i\sin im.\text{arc tang}\frac{\sin x}{i\sin im},$$

sans tenir compte des termes de la forme $C\cos x + C'\sin x$.

Réunissant la valeur de $\int_0^y \zeta \cos iy\,dy$ à celle de $\int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\,d\alpha$, et observant que

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin im}{\sin x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin x}{i \sin im}$$

et

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos im}{\cos x} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos x}{\cos im},$$

on obtient

$$\begin{aligned} z = C\cos x + C'\sin x - a\cos iy - a\cos x.\cos im.i \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos i(y-m)}{\cos x} \\ + a \sin x.i \sin im.\operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin i(y-m)}{\sin x}, \end{aligned}$$

ou simplement

$$\begin{aligned} z = -a\cos iy - a\cos x.\cos im.i \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos i(y-m)}{\cos x} \\ + a \sin x.i \sin im.\operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin i(y-m)}{\sin x}, \end{aligned}$$

en négligeant les termes en $\cos x$ et en $\sin x$.

Pour avoir les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, on pourrait se borner à substituer la valeur de z que l'on vient d'obtenir dans les égalités (4), mais on arrive plus rapidement au résultat de la manière suivante :

Exprimons d'abord z en fonction des variables α et β qui définissent les lignes de première et de seconde courbure de la surface. A cet effet, observons que, d'après des formules établies au paragraphe précédent, on a

$$\cos x = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \sin x = \frac{\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos i(y-m) = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad i\sin i(y-m) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos iy = \frac{\cos im.\sqrt{1+\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad i\sin iy = \frac{\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

donc,

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z = -a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} - ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$-a\cos im\,\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{i}{\alpha} + ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{i}{\beta},$$

ou bien

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z = -a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} - ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$-a\cos im.\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,i\alpha - ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\beta,$$

en négligeant des termes de la forme $C\cos x + C'\sin x$ dans la valeur de z.

Maintenant l'équation du plan tangent, étant en général

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy = -z,$$

si nous substituons à $\cos x$, $\sin x$, $i\sin iy$, z leurs valeurs en α et β, il vient

$$X\alpha\sqrt{1+\beta^2} + Y\beta\sqrt{1-\alpha^2} + Z(\cos im.\sqrt{1-\alpha^2} + i\sin im.\sqrt{1+\beta^2})$$

$$= a\cos im.\sqrt{1+\beta^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\alpha^2} + a\cos im.\alpha\sqrt{1+\beta^2}\,i\,\mathrm{arc\,tang}\,i\alpha$$

$$+ ai\sin im.\beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\beta,$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ par α et $\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$ par β,

$$\alpha X + \beta Y + (\cos im.\sqrt{1-\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2})\,Z$$

$$= a\cos im.\sqrt{1+\alpha^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\beta^2} + a\cos im.\alpha i\,\mathrm{arc\,sin}\,i\alpha$$

$$+ ai\sin im.\beta\,\mathrm{arc\,sin}\,\beta.$$

Or, les coordonnées ξ, η, ζ doivent vérifier l'équation du plan tangent et ses dérivées partielles relatives à α et à β; on a donc les trois équations

$$\alpha\xi + \beta\eta + (\cos im\sqrt{1-\beta^2} + i\sin im.\sqrt{1+\alpha^2})\,\zeta$$

$$= a\cos im.\sqrt{1+\alpha^2} + ai\sin im.\sqrt{1-\beta^2} + a\cos im.\alpha i\,\mathrm{arc\,sin}\,i\alpha$$

$$+ ai\sin im.\beta\,\mathrm{arc\,sin}\,\beta,$$

$$\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = a\cos im.i \operatorname{arc}\sin i\alpha,$$

$$\eta - \frac{\beta \cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = ai\sin im.\operatorname{arc}\sin\beta,$$

pour déterminer les coordonnées ξ, η, ζ. A la place de la première de ces équations, on peut prendre celle-ci :

$$\zeta = a\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2},$$

qui résulte de l'élimination de ξ et de η, et on a le système plus simple

$$\xi + \frac{\alpha i \sin im}{\sqrt{1+\alpha^2}}\zeta = a\cos im.i \operatorname{arc}\sin i\alpha,$$

$$\eta - \frac{\beta \cos im}{\sqrt{1-\beta^2}}\zeta = ai\sin im.\operatorname{arc}\sin\beta,$$

$$\zeta = a\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2};$$

que l'on peut encore remplacer par le suivant :

$$\xi - \zeta\sin im \operatorname{tang} i\alpha = a\alpha\cos im,$$

$$\eta - \zeta\cos im \operatorname{tang}\beta = a\beta i\sin im,$$

$$\zeta = a\cos i\alpha.\cos\beta,$$

en substituant α à $i\operatorname{arc}\sin i\alpha$, et β à $\operatorname{arc}\sin\beta$; lequel donne enfin

$$\xi = a\alpha\cos im + a\sin im.\sin i\alpha.\cos\beta,$$

$$\eta = a\beta i\sin im + a\cos im.\cos i\alpha.\sin\beta,$$

$$\zeta = a\cos i\alpha.\cos\beta.$$

Nous allons, en dernier lieu, nous proposer de fixer les fonctions arbitraires f et f_1 qui entrent dans l'équation intégrale

$$\zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy)$$

des surfaces d'étendue minimum, par la condition que ces surfaces

passent par des lignes données. Ce problème, considéré dans toute sa généralité, est très-difficile à résoudre; nous nous bornerons ici à traiter quelques cas particuliers intéressants.

Proposons-nous d'abord de trouver les surfaces d'étendue minimum qui passent par deux droites données. Supposons que l'une des droites se confonde avec l'axe des η et que l'autre soit parallèle au plan de (ξ, η), rencontre l'axe des ζ au point dont le ζ est h et fasse un angle égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec l'axe des ζ; nous aurons, quel que soit y,

$$\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$
$$\zeta = h \quad \text{pour} \quad x = k\pi;$$

donc, en mettant la valeur générale de ζ sous la forme

$$\zeta = \frac{1}{2}[\varphi(y + ix) + \varphi(y - ix)] + \frac{i}{2}[\varphi_1(y + ix) - \varphi_1(y - ix)],$$

il faudra que

$$\varphi(y) = 0, \quad \frac{i}{2}[\varphi_1(y + ik\pi) - \varphi_1(y - ik\pi)] = h.$$

La première condition montre que la fonction φ ne doit pas figurer dans la valeur générale de ζ; quant à la seconde, si nous posons

$$\varphi_1(z) = -\frac{h}{k\pi}z + \varphi_2(z),$$

elle devient

$$\varphi_2(y + ik\pi) = \varphi_2(y - ik\pi)$$

et donne alors

$$\varphi_2(z) = \Sigma A_p e^{\frac{pz}{k}},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs entières de p. Cela posé, on a

$$\zeta = \frac{h}{k\pi}x + \Sigma A_p e^{\frac{p}{k}y} \sin\frac{p}{k}x.$$

Si l'on voulait que la surface passât, en outre, par une troisième

droite parallèle au plan des (ξ, η), et telle, que $\zeta = h'$, $x = k'\pi$, il faudrait que l'on eût pour toutes les valeurs de y

$$h' = \frac{hk'}{k} + \Sigma A_p e^{\frac{p}{k}y} \sin \frac{pk'}{k} \pi.$$

Il n'est pas possible de satisfaire à cette condition quand $\frac{k'}{k}$ est incommensurable, à moins de supposer $A_p = 0$, ce qui conduit à l'hélicoïde; mais si $\frac{k'}{k}$ est égal au rapport $\frac{n'}{n}$ de deux entiers, on la rend identique en prenant pour p des multiples de n; encore faut-il que la condition $\frac{h}{h'} = \frac{k}{k'}$ soit remplie. On arriverait à des conclusions analogues dans le cas où la surface devrait contenir plus de trois droites parallèles au plan des (ξ, η).

Il y a à faire sur la solution précédente une remarque essentielle : d'après la manière même dont nous avons opéré, nous avons seulement obtenu une surface qui passe par des droites parallèles aux droites données, de telle sorte que l'on a encore à fixer les constantes qui s'introduisent dans le calcul de z, de façon que les droites données aient chacune un point sur la surface. Comme il n'y a que deux constantes, on voit que lorsque le nombre des droites surpasse deux, on est conduit à des équations de condition.

Le problème précédent a été résolu avant nous, mais d'une manière moins simple, par M. J.-A. Serret (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL).

Cherchons, en second lieu la surface d'étendue minimum qui passe par l'axe des ξ et qui coupe à angle droit le plan parallèle au plan des (ξ, η) représenté par l'équation

$$\zeta = h.$$

La question revient à ceci : Trouver la valeur de ζ, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0,$$

qui pour $x = \frac{1}{2}\pi$ se réduit à zéro et pour $y = 0$ se réduit à h. On

reconnaît que cette valeur de ζ est celle qui exprime le système des températures permanentes dans une lame rectangulaire indéfinie dont l'extrémité est entretenue à la température h et les deux arêtes infinies à la température zéro; en empruntant le résultat obtenu par Fourier, on a donc

$$\zeta = \frac{2h}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tang} e^{i(x+iy)} + \operatorname{arc\,tang} e^{-i(x-iy)}\right\} = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy}.$$

Calculons maintenant z au moyen de la formule

$$z = \mathrm{C}\cos x + \mathrm{C}'\sin x + \int_0^y \zeta\cos iy\,dy + \int_0^x \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}\sin(\alpha - x)\,d\alpha.$$

Or, dans le cas actuel,

$$\int_0^y \zeta\cos iy\,dy = \frac{2h}{\pi}\int_0^y \cos iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy}\,dy$$

$$= -\frac{2h}{\pi}i\sin iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} - \frac{2h}{\pi}\cos x.\log\frac{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}}{\cos x}.$$

puis

$$\int_0^y \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_{\alpha,0}\sin(\alpha - x)\,d\alpha = \frac{2h}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(\alpha - x)}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

$$= -\frac{2h}{\pi}\cos x.\log\cos x - \frac{2h}{\pi}.x\sin x,$$

donc

$$z = -\frac{2h}{\pi}x\sin x - \frac{2h}{\pi}i\sin iy.\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} - \frac{2h}{\pi}\cos x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy};$$

substituant cette valeur de z dans les relations (4), on a pour déterminer les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, les trois équations

$$\xi\cos x + \eta\sin x = \frac{2h}{\pi}\left\{x\sin x + \cos x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}\right\},$$

$$\xi\sin x - \eta\cos x = \frac{2h}{\pi}\left\{\sin x.\log\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy} - x\cos x\right\},$$

$$\zeta = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos x}{i\sin iy} = \frac{2h}{\pi}\operatorname{arc\,sin}\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}}.$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{2h}{\pi} \log \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}, \quad \eta = \frac{2h}{\pi} x, \quad \zeta = \frac{2h}{\pi} \arc \sin \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 iy}};$$

et enfin

$$\xi = \frac{2h}{\pi} \log \frac{\cos \frac{\pi}{2h} \eta}{\sin \frac{\pi}{2h} \zeta},$$

Cette surface, qui correspond, comme on l'a vu plus haut, à la première question résolue par Fourier dans sa théorie mathématique de la chaleur, a été indiquée depuis longtemps : on la trouve dans un Mémoire de M. Scherk, inséré dans le tome XIII du *Journal de Crelle*.

Proposons-nous encore de trouver la surface d'étendue minimum qui touche une surface donnée suivant une certaine courbe ou, ce qui revient au même, qui passe par une courbe le long de laquelle on connaît la direction de la normale.

Soit

$$y = \varphi(x),$$

ou mieux

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

en introduisant les variables $x_1 = x + iy$, $y_1 = x - iy$, la relation connue qui définit la direction des normales à la surface cherchée, tout le long de la ligne donnée; supposons d'ailleurs que l'on ait exprimé en fonction de x_1, la coordonnée ζ et l'arc σ de la courbe donnée et que l'on ait

$$\zeta = \varphi_1(x_1), \quad \sigma = \varphi_2(x_1).$$

Si l'on observe que le carré de l'élément d'une courbe quelconque tracée sur une surface d'étendue minimum est

$$ds^2 = 4 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2} \frac{d\zeta}{dx_1} \frac{d\zeta}{dy_1} dx_1 dy_1,$$

on voit qu'il s'agira de déterminer les fonctions arbitraires f et f_1 qui entrent dans la valeur générale de ζ,

$$\zeta = f(x_1) + f_1(y_1).$$

par la condition que l'on ait

$$f(x_1)+f_1(y_1)=\varphi_1(x_1),$$

$$4\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}f'(x_1)f'_1(y_1)dy_1=[\varphi'_2(x_1)]^2 dx_1$$

lorsque

$$y_1=\varphi(x_1);$$

ou, ce qui revient au même, de façon que

$$f'(x_1)+f'_1(y_1)\varphi'(x_1)=\varphi'_1(x_1),$$

$$4\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}f'(x_1)f'_1(y_1)\varphi'(x_1)=[\varphi'_2(x_1)]^2$$

toujours pour

$$y_1=\varphi(x_1).$$

Or les deux dernières équations font connaître les dérivées $f'(x_1)$, $f'_1(y_1)$; d'ailleurs, au moyen de la relation $y_1=\varphi(x_1)$, ces dérivées peuvent s'exprimer la première en fonction de x_1 seulement, la seconde en fonction de y_1 seulement : on peut donc par des quadratures avoir aussi les fonctions $f(x_1)$, $f_1(y_1)$ elles-mêmes, et la surface est ainsi déterminée.

Observons toutefois que notre calcul introduit trois constantes arbitraires, ce qui ne doit pas surprendre, puisque nous avons seulement employé les dérivées des équations

$$\zeta=\varphi_1(x_1),\quad \sigma=\varphi_2(x_1):$$

nous aurons donc encore, dans chaque cas particulier, à fixer les trois constantes par la condition que la surface passe réellement par la courbe donnée.

La solution précédente conduit surtout à des résultats simples lorsqu'il s'agit de trouver la surface d'étendue minimum qui touche une sphère suivant une certaine courbe. En effet, en prenant le rayon de la sphère pour unité, nous avons alors pour la courbe donnée

$$\zeta=i\,\mathrm{tang}\,iy,\quad d\sigma^2=\frac{1}{\cos^2 iy}(dx^2-dy^2).$$

ou bien

$$\zeta = i \operatorname{tang} \frac{x_1 - y_1}{2}, \quad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}} dx_1 dy_1;$$

donc les équations qui déterminent $f'(x_1)$ et $f_1'(y_1)$ se réduisent à

$$f'(x_1) + f'_1(y_1)\varphi'(x_1) = \frac{i}{2} \frac{1 - \varphi'(x_1)}{\cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(x_1) f'_1(y_1) = \frac{1}{4 \cos^4 \frac{x_1 - y_1}{2}};$$

d'où l'on tire

$$f'(x_1) = \frac{i}{2 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(y_1) = \frac{-i}{2 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

ou bien

$$f'(x_1) = \frac{-i\varphi'(x_1)}{2 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}},$$

$$f'(y_1) = \frac{i}{2\varphi'(x_1) \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}}.$$

La seconde solution rentre dans la première, car elle donne pour $f(x_1)$ la valeur que la premiere fournit pour $f_1(y_1)$, et pour $f_1(y_1)$ la valeur que la première fournit pour $f(x_1)$; nous pouvons donc nous borner à la première solution ; ainsi en exprimant

$$\frac{i}{2 \cos^2 \frac{x_1 - y_1}{2}}$$

en fonction de x_1 au moyen de la relation $y_1 = \varphi(x_1)$, et intégrant par

rapport à x_1 nous aurons $f(x_1)$; de même, en exprimant

$$\frac{-i}{2\cos^2\frac{x_1-y_1}{2}}$$

en fonction de y_1 et intégrant par rapport à y_1, nous aurons $f_1(y_1)$.

Faisons une application simple : supposons que la courbe tracée sur la sphère soit la loxodromie représentée par l'équation $y=x$, laquelle équation donne

$$y_1=-ix_1 \quad \text{et} \quad x_1=iy_1.$$

En opérant comme il a été indiqué, on trouve sans difficulté

$$f(x_1)=\frac{1+i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{(1+i)x_1}{2}\right]+\text{const.},$$

$$f_1(y_1)=\frac{1-i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{(1-i)y_1}{2}\right]+\text{const.},$$

et, par suite,

$$\zeta=\frac{1+i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{1+i}{2}(x+iy)\right]+\frac{1-i}{2}\operatorname{tang}\left[\frac{1-i}{2}(x-iy)\right].$$

Le problème général que nous venons de résoudre permet de déterminer une surface d'étendue minimum d'après l'une des conditions suivantes :

1°. Connaissant une de ses lignes géodésiques;

2°. Connaissant une de ses lignes asymptotiques;

3°. Connaissant une de ses lignes de courbure;

4°. Connaissant une de ses lignes d'ombre;

5°. Connaissant une de ses lignes de perspective.

En effet, dans chacun de ces cas, on connaît la direction que doit avoir la normale à la surface tout le long de la ligne donnée. Dans le premier cas, les normales à la surface sont les normales principales de la ligne donnée; dans le second cas, les normales à la surface sont les bi-normales de la ligne donnée; dans le troisième cas, les normales à la surface sont l'un des systèmes de normales à la ligne donnée qui forment une surface développable, etc.

Faisons quelques applications.

Cherchons, en premier lieu, la surface d'étendue minimum qui admet pour ligne asymptotique une hélice donnée. Supposons le cylindre sur lequel l'hélice est tracée parallèle aux ζ; représentons sa base par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la tangente prolongée du côté des σ négatifs fait avec l'axe des ξ; enfin appelons $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ l'angle que les tangentes à l'hélice font avec l'axe de ζ; nous trouverons sans difficulté pour la surface cherchée

$$\zeta = \frac{1}{2 i \sin i y_0} \{ \varphi[x + i(y - y_0)] + \varphi[x - i(y - y_0)] \},$$

y_0 dépendant de θ_0 par la relation $\tang \frac{1}{2}\theta_0 = e^{y_0}$.

Cherchons, en second lieu, la surface d'étendue minimum qui admet pour ligne de courbure une ligne plane donnée.

Supposons la courbe donnée dans le plan des (ξ, η) et représentons-la par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la normale à l'extrémité de σ fait avec l'axe des ξ, on aura pour l'équation de la surface cherchée

$$\zeta = \frac{i}{2 \cos y_0} \{ \varphi[x + i(y - y_0)] - \varphi[x - i(y - y_0)] \},$$

y_0 étant une constante arbitraire.

IX. — Surfaces pour lesquelles la somme des deux rayons de courbure principaux est double de la normall.

L'équation (25) donne immédiatement

$$(63) \qquad u + w + \frac{2\zeta}{i \sin iy} = 0.$$

ou

(64) $$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}-2i\cot(iy)\cdot\frac{dz}{dy}+z=0,$$

pour l'équation aux différentielles partielles des surfaces cherchées.

Je pose

$$z=\int \omega\, i\sin(iy)\,dy\;;$$

en substituant dans l'équation (64) et différentiant par rapport à y, il vient

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dy^2}=0,$$

c'est-à-dire l'équation de la chaleur, comme dans le cas des surfaces d'étendue minimum. On a donc

$$\omega=f(x+iy)+f_1(x-iy),$$

f et f_1 étant deux fonctions réelles ou imaginaires quelconques et par conséquent

$$z=\int\{f(x+iy)+f_1(x-iy)\}\, i\sin iy\, dy\,.$$

où la fonction de x qui accompagne l'intégrale doit encore être déterminée par la condition que l'équation (64) soit satisfaite.

Le calcul général de cette fonction de x n'offre aucune difficulté, il suffit de suivre la marche qui a déjà été indiquée à l'égard de l'intégrale des surfaces d'étendue minimum, et l'on trouve

$$z=\mathrm{C}\cos x+\mathrm{C}'\sin x+\int_0^y \omega\, i\sin iy\, dy+\int_0^x \omega_{\alpha,0}\,\sin(\alpha-x)\,d\alpha.$$

$\omega_{\alpha,0}$ étant la valeur que prend ω pour $x=\alpha$ et $y=0$.

On reconnaît sans peine que

$$\zeta=i\,\mathrm{tang}\, iy\,.\,\omega,$$

de telle sorte que, ω étant connu, on a ζ, par suite

$$v = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dx}, \quad w = \cos iy \cdot \frac{d\zeta}{dy};$$

puis enfin u au moyen de l'équation (63). Ceci fait voir d'une seconde manière que la surface est complétement déterminée, du moins quant à la forme, lorsque à la valeur de ω, on joint la condition

$$u + iw + \frac{2\zeta}{i \sin iy} = 0.$$

Nous aurions beaucoup de choses à dire sur les surfaces considérées; leur analogie, au point de vue analytique, avec les surfaces d'étendue minimum fait pressentir en effet que l'on peut résoudre pour ces surfaces les mêmes problèmes que pour les surfaces d'étendue minimum. Nous nous bornerons à indiquer une propriété assez curieuse relative aux lignes de courbure.

En calculant, comme on l'a indiqué plus haut, les valeurs de u, v, w, on trouve

$$v = i \sin iy \left\{ f'(x+iy) + f'_1(x-iy) \right\},$$

$$w = -\sin iy \left\{ f'(x+iy) - f'_1(x-iy) \right\} - \frac{1}{\cos iy} \left\{ f(x+iy) + f_1(x-iy) \right\},$$

$$u = \sin iy \left\{ f'(x+iy) - f'_1(x-iy) \right\} - \frac{1}{\cos iy} \left\{ f(x+iy) + f_1(x-iy) \right\}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (23), il vient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2i \frac{f'(x+iy) - f_1'(x-iy)}{f'(x+iy) + f_1'(x-iy)} \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

pour l'équation des lignes de courbure des surfaces considérées : or cette équation est aussi celle des lignes de courbure des surfaces d'étendue minimum ; nous pouvons donc conclure qu'à chaque surface d'étendue minimum correspond une surface ayant en chaque point la somme des deux rayons de courbure principaux égale au double de la normale et dont les lignes de courbure sont respectivement parallèles à celles de la surface d'étendue minimum. Ainsi, au plan correspond la sphère, à la surface d'étendue minimum du genre hélicoïde correspond la surface dont les coordonnées ξ, η, ζ

vérifient les équations

$$\xi \sin x - \eta \cos x = -a \cos iy + a \cos x,$$

$$\xi \cos x + \eta \sin x = \frac{ax + by}{\cos iy} + bi \sin iy - a \sin x,$$

$$\zeta = (ax + by)\, i \operatorname{tang} iy.$$

Lorsque $a = 0$, cette dernière surface devient la surface de révolution qui a pour méridien la courbe définie par les deux équations

$$\xi = \frac{by}{\cos iy} + bi \sin iy,$$

$$\zeta = byi \operatorname{tang} iy.$$

Signalons encore une surface à lignes de courbures planes, que l'on obtient en posant

$$\omega = -\frac{ai}{2} \left\{ \cot[x + i(y - m)] - \cot[x - i(y - m)] \right\}.$$

En portant cette valeur de ω dans l'expression générale de z,

$$z = C \cos x + C' \sin x + \int_0^y \omega i \sin iy\, dy + \int_0^x \omega_{\alpha,0} \sin(\alpha - x)\, d\alpha,$$

on trouve, par un calcul dont on a déjà indiqué les détails,

$$z = -ai \sin iy + a \sin im . \cos x . \operatorname{arc\,tang} \frac{i \cos i(y - m)}{\cos x}$$

$$+ a \cos im . \sin x . \operatorname{arc\,tang} \frac{i \sin i(y - m)}{\sin x},$$

puis on a, pour déterminer les trois coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, les équations

$$\xi + \zeta \sin im . \operatorname{tang} i\alpha = -a\alpha i \sin im,$$

$$\eta - \zeta \cos im . \operatorname{tang} \beta = a\beta \cos im,$$

$$\zeta \left(\frac{i \sin im}{\cos i\alpha} + \frac{\cos im}{\cos \beta} \right) = ai \sin im . \cos i\alpha + a \cos im . \cos \beta.$$

X. — Surfaces applicables sur la sphère.

Les surfaces applicables sur la sphère ou plus généralement celles dont les rayons de courbure principaux ont un produit constant sont caractérisées par la condition

$$(65)\qquad uw - v^2 = \frac{-a^2}{\cos^2 iy},$$

a étant une constante réelle ou imaginaire.

En tirant de l'équation précédente la valeur de u et différentiant par rapport à y, il vient, à cause des relations (8),

$$(66)\quad q^2 r - 2pqs + \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^2 iy}\right)t + i\,\mathrm{tang}\, iy\,.\,q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^2 iy}\right) = 0.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d\zeta}{dx} = p,\quad \frac{d\zeta}{dy} = q,\quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = s,\quad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = t.$$

L'intégration de l'équation (66) me paraît offrir de grandes difficultés : les nombreuses tentatives que j'ai faites à cet égard ont toujours été infructueuses; je n'ai pu jusqu'ici qu'opérer une certaine réduction, qui constitue toutefois, selon les idées généralement admises, un premier pas vers l'intégration définitive.

On sait que les équations aux différentielles partielles du second ordre dans lesquelles il n'entre que la dérivée ordinairement représentée par s, forment le type le plus simple, et que c'est d'abord à des équations de cette forme que l'on cherche à ramener les équations plus générales dont on se propose l'intégration. Ampère, dans le grand Mémoire qui fait partie du XVIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* conseille toujours la réduction dont nous venons de parler, et indique le moyen de l'effectuer toutes les fois que les équations aux différentielles ordinaires de la caractéristique de Monge conduisent à deux combinaisons intégrables. L'équation (66) ne rentre pas dans le cas traité par Ampère, les équations de la caractéristique n'admettent en effet aucune combinaison intégrale; cependant il est possible d'en faire disparaître les termes en r et t. La méthode que j'emploie pour opérer cette réduction s'étend à un grand nombre d'autres équations;

je pense faire une chose utile en en présentant ici une première application.

Considérons, à l'exemple d'Ampère, x et par suite z, p et q, comme fonctions de y et d'une nouvelle variable α; désignons par les symboles $\frac{\partial .}{\partial y}$, $\frac{\partial .}{\partial \alpha}$ les dérivées relatives à ces nouvelles variables y et α, nous aurons

$$dz = p\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + q\,dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial \alpha}d\alpha,$$

$$dp = r\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + s\,dy = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha,$$

$$dq = s\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha\right) + t\,dy = \frac{\partial q}{\partial y}dy + \frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha,$$

égalités qui ont lieu pour toutes les valeurs de dy et de $d\alpha$, et qui, par conséquent, entraînent les suivantes :

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} &p\frac{\partial x}{\partial y} + q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial \alpha};\\ &r\frac{\partial x}{\partial y} + s = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad r\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial \alpha};\\ &s\frac{\partial x}{\partial y} + t = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad s\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}.\end{aligned}\right.$$

De la troisième et de la cinquième on tire

$$r = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - s}{\frac{\partial x}{\partial y}}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y} - s\frac{\partial x}{\partial y};$$

en portant ces valeurs de r et de t dans l'équation (66), il vient

$$\frac{q^2\left(\frac{\partial p}{\partial y} - s\right)}{\frac{\partial x}{\partial y}} - 2pqs + \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y} - s\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$
$$+ i\,\mathrm{tang}\,iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0;$$

or α étant entièrement arbitraire, on peut assujettir cette variable à la

condition que le coefficient de s soit égal à zéro; nous obtenons alors

$$\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 2pq\frac{\partial x}{\partial y} + q^2 = 0,$$

$$q^2\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} + i\,\text{tang}\,iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

ou mieux

$$\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial x}{\partial y} + q = 0,$$

$$\left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} - q\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + i\,\text{tang}\,iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0,$$

en réduisant le premier membre de la première équation à l'un des facteurs dans lesquels il se décompose; et si nous joignons à ces deux équations celles-ci :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = p\frac{\partial x}{\partial y} + q,$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

qui sont comprises dans le groupe (67), nous avons quatre équations pour définir complétement les fonctions z, x, p, q de y et de α.

Je considère d'abord la seconde de ces équations

$$(68)\quad \left(p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial y} - q\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + i\,\text{tang}\,iy.q\left(p^2 + q^2 + \frac{3a^2}{\cos^4 iy}\right) = 0.$$

Comme elle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, elle ne correspond pas à une relation en termes finis contenant p, q et y; toutefois elle permet d'exprimer p et q au moyen d'une fonction arbitraire de y et de α et de la dérivée de cette fonction par rapport à y. En effet, écrivons-la ainsi

$$\frac{\partial q^{-2}}{\partial y} + 2q^{-2}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(p - \frac{a}{\cos^2 iy}\right)}{p - \frac{a}{\cos^2 iy}} - i\,\text{tang}\,iy\frac{p - \frac{a}{\cos^2 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}}\right\} - \frac{2i\,\text{tang}\,iy}{p^2 - \frac{a^2}{\cos^4 iy}} = 0,$$

puis posons

$$-i\,\text{tang}\,iy\frac{p - \frac{a}{\cos^2 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega}$$

et multiplions par $\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2$, il viendra

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2\frac{\partial q^{-2}}{\partial y}+2q^{-2}\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)$$
$$+2q^{-2}\omega\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2\frac{\partial\omega}{\partial y}+2\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,$$

d'où, en intégrant,

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2 q^{-2}+\omega^2=\mathrm{C},$$

C étant une constante par rapport à y, c'est-à-dire une fonction arbitraire de α que l'on peut toujours supposer égale à 1, en remplaçant ω par $\omega\sqrt{\mathrm{C}}$ ce qui n'altère pas la valeur de p. On a donc les deux équations

$$\frac{p-\dfrac{a}{\cos^2 iy}}{p+\dfrac{a}{\cos^2 iy}}=-i\tang iy\,.\,\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega},$$

$$\omega^2\left(p-\frac{a}{\cos^2 iy}\right)q^{-2}+\omega^2=1,$$

qui font connaître des valeurs de p et de q satisfaisant à l'équation (68) quelle que soit la fonction ω.

Considérons maintenant l'équation

$$\left(p+\frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial x}{\partial y}+q=0;$$

si nous substituons à p et q leurs valeurs en fonction de ω, il vient

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}{i\tang iy\sqrt{1-\omega^2}};$$

d'où, en intégrant,

$$x=\int\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}dy}{i\tang iy\sqrt{1-\omega^2}}=\frac{\arc\sin\omega}{i\tang iy}+\int\frac{\arc\sin\omega\,dy}{\sin^2 iy}$$

ou

$$x = -i \sin iy . \cos iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \theta,$$

en posant

$$\arcsin \omega = \sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

qui, en se rappelant la valeur de $\frac{\partial x}{\partial y}$, donne

$$\frac{q\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)^2} + \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial y}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = 0,$$

puis

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{-q}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} + \frac{\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2ai \sin iy}{\cos^3 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{2ai \sin iy}{\cos^3 iy}}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial y}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} + \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right)}{p + \frac{a}{\cos^2 iy}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega} + i \operatorname{tang} iy.$$

Or, en intégrant, par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(p + \frac{a}{\cos^2 iy}\right) = C \frac{\omega}{\cos iy},$$

C étant une fonction arbitraire de α, d'où, en introduisant la fonction θ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - i \sin iy . \cos iy \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial y}$$

$$= \frac{C \cos^2 iy}{2ai \sin iy}\left\{ \cos\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\frac{\partial .}{\partial y}\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + i \operatorname{tang} iy . \sin\left(\sin^2 iy \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right\}$$

ou plus simplement

$$(69)\quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} - y_1\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\,\partial y_1} = y_1^2\sqrt{y_1^2-1}\cos\left(\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2} + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-1}}\sin\left(\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)$$

en posant

$$\frac{dy}{\sin^2 iy} = dy_1,\quad \frac{C d\alpha}{2a} = d\alpha_1.$$

Toute la question est évidemment ramenée à intégrer cette dernière équation, car si on avait θ en fonction de α_1 et de y_1, et par conséquent en fonction de α et de y, on connaîtrait par cela même en fonctions des mêmes variables, x, puis p et q, puis z au moyen de la relation

$$dz = \left(p\frac{\partial x}{\partial y} + q\right)dy + p\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

qui satisfait à la condition d'intégrabilité, à cause de l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial q}{\partial\alpha} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\alpha};$$

et en éliminant α de la valeur de z au moyen de la relation qui donne x, on aurait l'intégrale cherchée en z, x et y.

L'équation (69) ne contient pas la dérivée seconde $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1^2}$, mais elle renferme $\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2}$; nous avons donc encore à faire disparaître cette dernière dérivée. Pour ne pas trop multiplier les notations, nous changerons θ en z, α_1 en x, y_1 en y, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}$ en $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{\partial\theta}{\partial y_1}$ en $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\,\partial y_1}$ en $\frac{d^2z}{dxdy} = s$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^2}$ en $\frac{d^2z}{dy^2} = t$, ce qui donnera

$$(69\ bis)\qquad p - ys = y^2\sqrt{y^2-1}\cos q.t + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q.$$

Considérons y et par suite z, p et q comme fonctions de x et d'une nouvelle variable α; désignons d'ailleurs par les symboles $\frac{\partial\,.}{\partial x}$, $\frac{\partial\,.}{\partial\alpha}$ les dérivées relatives à ces nouvelles variables x et α, nous aurons comme

plus haut les égalités

$$(70)\quad \begin{cases} p+q\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}, & q\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial z}{\partial \alpha};\\ r+s\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial p}{\partial x}, & s\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial p}{\partial \alpha};\\ s+t\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial q}{\partial x}, & t\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

De la cinquième, on tire

$$t=\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-s}{\dfrac{\partial y}{\partial x}};$$

en portant cette valeur de t dans l'équation (69 *bis*), il vient

$$p-ys=y^2\sqrt{y^2-1}\cos q\cdot\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-s}{\dfrac{\partial y}{\partial x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q.$$

Mais α étant tout à fait arbitraire, on peut assujettir cette variable à la condition que le coefficient de s soit nul, nous obtenons alors

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y\sqrt{y^2-1}\cos q,$$

$$p-y\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin q,$$

et si nous joignons à ces deux équations celles-ci

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p+q\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \alpha}-\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

qui sont comprises dans le groupe (70), nous avons quatre équations pour définir complétement les fonctions z, y, p, q de x et de α.

Éliminons p et $\frac{\partial y}{\partial x}$ entre la première, la seconde et la quatrième équa-

tion, il vient

$$y\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial\alpha}+\frac{y^3}{\sqrt{y^2-1}}\cos q\cdot\frac{\partial q}{\partial\alpha}-\sin q\cdot\frac{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

d'où, en multipliant par $\frac{2(y^2-1)}{y}\frac{\partial q}{\partial\alpha}$ et en rétablissant à la place de $\cos q$ sa valeur $\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y\sqrt{y^2-1}}$,

$$2(y^2-1)\frac{\partial q}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial\alpha}+2y\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2+2\frac{\partial\cdot}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y\sqrt{y^2-1}}\right)\frac{\frac{\partial y}{\partial\alpha}}{y\sqrt{y^2-1}}=0.$$

ou bien

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x}\left[(y^2-1)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2\right]+\frac{\partial\cdot}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial y}{y\sqrt{y^2-1}}}{\partial\alpha}\right)^2=0,$$

et en intégrant par rapport à x

$$(y^2-1)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\frac{\partial y}{y\sqrt{y^2-1}}}{\partial\alpha}\right)^2=C,$$

C étant une fonction arbitraire de α.

Pour simplifier ce résultat, je pose les deux égalités

$$\sqrt{C}\,d\alpha=d\alpha_1,\quad \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}=dy_1,$$

dont la seconde donne

$$\text{arc séc}\, y=y_1,\quad \cos q=\frac{\partial y_1}{\partial x}$$

et j'obtiens

$$\tang^2 y_1\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\partial\alpha}\right)^2=\left[1-\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\right)^2\right],$$

ou bien, en employant les notations ordinaires,

$$s\,\tang z=\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-q^2}.$$

Telle est, en définitive, l'équation qu'il faudrait intégrer pour avoir l'équation en termes finis des surfaces dont le produit des rayons de courbure pincipaux est constant.

Nous n'avons eu en vue dans ce qui précède que l'intégration générale de l'équation (66); si nous avions voulu obtenir des intégrales particulières, il nous aurait été bien facile de retrouver tout ce que l'on connaît à ce sujet. Ainsi cherchons les surfaces hélicoïdes qui satisfont à l'équation (65), on a (§ XII, 1re Partie)

$$u = Y, \quad v = m \cos iy, \quad w = \frac{Y'}{i \operatorname{tang} iy},$$

par suite

$$\frac{YY'}{i \operatorname{tang} iy} - m^2 \cos^2 iy = -\frac{a}{\cos^2 iy},$$

d'ou

$$Y = \sqrt{C - m^2 \cos^2 iy - \frac{a^2}{\cos^2 iy}}.$$

Y étant déterminé, on connaît par cela même u, v, w, par suite z et enfin les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface, en suivant la marche indiquée au § III de la première Partie. On retrouve ainsi d'une manière simple une classe de surfaces applicables sur la sphère que M. Minding a donnée dans le tome XIX du *Journal de Crelle*.

Cherchons encore les surfaces imaginaires que M. J.-A. Serret a fait connaître dans le tome XIII de ce journal. On a pour ces surfaces

$$w = i\left(v - \frac{a}{\cos iy}\right)$$

et par suite

$$u = -i\left(v + \frac{a}{\cos iy}\right);$$

en portant ces valeurs de u et de w dans les deux relations

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy \,.\, w,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy \,.\, v,$$

on trouve pour résultat unique

$$i\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} + i\,\mathrm{tang}\,iy\,.\,v,$$

d'où l'on tire

$$v = \cos iy f(x+iy),$$

ce qui donne

$$w = i\left[\cos iy f(x+iy) - \frac{a}{\cos iy}\right],$$

$$u = -\,i\left[\cos iy f(x+iy) + \frac{a}{\cos iy}\right]:$$

u, v, w étant connus la surface est déterminée.

Signalons la valeur de ζ qui, étant en général l'intégrale de

$$\frac{v}{\cos iy}dx + \frac{w}{\cos iy}dy,$$

devient ici

$$\zeta = \mathrm{F}(x+iy) + a\,\mathrm{tang}\,iy,$$

la fonction F représentant l'intégrale de la fonction f.

Toutes les propriétés que M. Serret a reconnues aux surfaces considérées deviennent pour ainsi dire évidentes au moyen de nos formules. Ainsi les valeurs de u, v, w donnent immédiatement

$$(u-w)^2 + 4v^2 = 0,$$

ce qui prouve que les surfaces ont leurs rayons de courbure principaux égaux entre eux. De même l'équation générale des lignes asymptotiques

$$u + 2v\frac{dy}{dx} + w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

étant vérifiée, dans le cas actuel, par $\frac{dy}{dx} = i$, on voit que les surfaces ont pour transformées sphériques des lignes asymptotiques de l'un des systèmes les grands cercles imaginaires

$$y = ix + \text{const.}$$

et sont par conséquent des surfaces réglées. Nous pourrions encore ajouter quelques autres propriétés relatives aux lignes de courbure, aux lignes isométriques, aux lignes géodésiques. Mais nous nous en tiendrons à ce qui précède.

XI. — Surfaces dont la courbure moyenne est constante.

Les surfaces pour lesquelles la somme des inverses des rayons de courbure principaux est la même en chaque point et qui sont définies par l'équation

$$\frac{a}{\cos iy}(u + w) = uw - v^2$$

se ramènent immédiatement à celles qui ont été étudiées dans le paragraphe précédent. En effet, si on change z en $z + a\cos iy$, v ne change pas, u et w augmentent l'un et l'autre de $\frac{a}{\cos iy}$, donc l'équation précédente devient

$$\frac{2a^2}{\cos^2 iy} = uw - v^2,$$

qui est bien celle des surfaces pour lesquelles le produit des rayons de courbure principaux est constant. Ce rapprochement entre les surfaces applicables sur la sphère et celles dont la courbure moyenne est constante, qu'il est d'ailleurs facile d'expliquer par des considérations géométriques, comme je l'ai fait voir, il y a plusieurs années, dans les *Nouvelles Annales*, t. XII, montre que les surfaces étudiées par M. Ernest Lamarle, dans le numéro d'octobre 1859 du *Journal de Mathématiques*, se ramènent immédiatement à celles que M. Minding a fait connaître depuis longtemps dans le *Journal de Crelle*.

ADDITION

A LA NOTE AU SUJET D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER

INSÉRÉE AU CAHIER D'AVRIL [*].

Par M. J. LIOUVILLE.

Je veux ajouter ici une règle nouvelle aux deux règles que nous avons proposées M. Kronecker et moi pour la détermination du signe $\pm$ dans la congruence

$$1.2.3\ldots\frac{n-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{n},$$

n étant un nombre premier de la forme $8k+3$.

M. Kronecker retranche de n tous les carrés pairs de grandeur moindre $4, 16, 36, 64, \ldots, (2\omega)^2$, puis il cherche le nombre ν de ceux des restes ainsi obtenus qui peuvent se mettre sous la forme

$$p^{4l+1} r^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas r. Or on a

$$\nu = \nu' + \nu'',$$

ν' se rapportant aux carrés des nombres impairement pairs et ν'' aux carrés des nombres pairement pairs; et ce n'est que de ν'', ou plutôt de $\nu''+k$ que la réponse à faire dépend dans la règle nouvelle que j'annonce, à savoir, il faut prendre le signe supérieur quand $\nu''+k$ est pair, et le signe inférieur quand $\nu''+k$ est impair. En remplaçant ainsi ν par $\nu''+k$, j'abrége évidemment le calcul de moitié, les carrés à retrancher de n n'étant plus que $16, 64$, etc.

---

[*] Corrigeons en passant une faute d'impression. Page 128, ligne 8, au lieu de i, lisez i''.

Pour donner un exemple de l'application des trois règles, je profite d'une table dressée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IX, p. 189). Je vois par cette table que pour $n = 43$, on doit prendre le signe inférieur.

Or par la règle de M. Kronecker, il faut retrancher de 43 les carrés pairs 4, 16, 36, d'où les trois restes 39, 27, 7, dont le dernier seul peut se mettre sous la forme $p^{4l+1}r^2$; on a ainsi $\nu = 1$, d'où le signe inférieur, ce qui exact.

Avec ma nouvelle règle, on ne retranche que 16, on trouve $\nu'' = 0$, $\nu'' + k = 5$: la conclusion est donc la même.

Enfin, pour appliquer mon ancienne règle, on retranchera de 43 les carrés impairs de grandeur moindre 1, 9, 25; les restes sont 42, 34, 18 : le second seul est de la forme $2q^{4\alpha+1}t^2$, le troisième donne la décomposition $5^2 + 2.3^2$ de 43, et l'on en conclut $\sigma = 0$, comme déjà $\tau = 1$. Donc $\sigma + \tau$ est impair : même conclusion que plus haut sur le signe.

Je dois avertir que ce dernier procédé, fondé sur l'emploi des carrés impairs, pourrait aussi être simplifié : nous trouverons une occasion de revenir sur ce point.

En admettant que la règle donnée par M. Kronecker soit exacte (ce dont je ne doute nullement, quoique je n'en aie pas de démonstration) et en la rapprochant de ma nouvelle règle, on en conclura la congruence

$$\nu' \equiv k \pmod{2}.$$

Donc si k est impair, ν' le sera. De là ce théorème :

« Tout nombre premier n de la forme $16g + 11$ peut être mis un
» nombre impair de fois sous la forme

$$n = 4u^2 + p^{4l+1}r^2,$$

» p étant un nombre premier $(8h + 7)$ et r, u des entiers impairs non
» divisibles par p. » Exemple : $11 = 4.1^2 + 7.1^2$.

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit $2^\alpha m$ un nombre entier donné pair ou impair, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On demande le nombre N des représentations de $2^\alpha m$ par la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

x, y, z, t étant des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question n'offre aujourd'hui aucune difficulté. Il suffit de se rappeler les beaux théorèmes de Jacobi concernant la représentation des nombres par une somme de quatre carrés, et d'avoir égard à cette proposition bien connue, que le nombre des représentations par une somme de deux carrés est le même pour un entier donné quelconque n et pour son double $2n$. Ainsi tout nombre pair peut être mis le même nombre de fois sous l'une et sous l'autre des deux formes

$$u^2 + v^2, \quad 2(z^2 + t^2).$$

La somme des diviseurs de m devant jouer un grand rôle dans ce qui suit, nous désignerons, pour abréger, cette somme par $\zeta_1(m)$. Le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + u^2 + v^2,$$

où m est impair, s'exprimera dès lors (en vertu d'un théorème de Ja-

cobi) par $8\zeta_1(m)$. Or il peut arriver que $x^2 + y^2$ fasse une somme paire, et par conséquent $u^2 + v^2$ une somme impaire; ou bien, inversement, $u^2 + v^2$ sera un nombre pair, $x^2 + y^2$ un nombre impair. Ces deux cas se présentent évidemment le même nombre de fois, puisque l'on passe de l'un à l'autre en permutant les deux sommes. Si donc on exige que $u^2 + v^2$ fasse un nombre pair, le nombre $8\zeta_1(m)$ des solutions sera réduit à moitié. Mais alors on pourra écrire sans inconvénient $2(z^2 + t^2)$ au lieu de $u^2 + v^2$ et *vice versâ*. Le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

où m est un entier impair donné, s'exprime donc par $4\zeta_1(m)$.

Occupons-nous à présent de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2).$$

Il est clair que la somme $x^2 + y^2$ ne pourra être ici qu'un nombre pair, en sorte que le nombre des solutions ne changera pas si l'on écrit $2(x'^2 + y'^2)$ au lieu de $x^2 + y^2$, ce qui revient à remplacer l'équation ci-dessus par celle-ci :

$$m = x'^2 + y'^2 + z^2 + t^2.$$

Or le nombre des solutions de cette dernière équation est $8\zeta_1(m)$. Le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est donc aussi $8\zeta_1(m)$.

Restent les nombres pairement pairs exprimés par $2^\alpha m$ en prenant $\alpha > 1$. Mais en répétant ce que nous venons de dire pour le cas d'un nombre simplement pair, on reconnaîtra que le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

ne peut pas différer du nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1} m = x'^2 + y'^2 + z^2 + t^2;$$

et ce dernier nombre, Jacobi l'a trouvé égal à $24\zeta_1(m)$, $2^{\alpha-1}m$ étant ici un nombre pair. La question proposée est donc complétement résolue.

En résumé, le nombre N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est fourni par les formules respectives

$$N = 4\zeta_1(m), \quad N = 8\zeta_1(m), \quad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha \geqq 2.$$

Le nombre M des solutions *propres*, c'est-à-dire des solutions où aucun diviseur plus grand que l'unité n'appartient à la fois aux quatre entiers x, y, z, t, s'en déduit sans peine. Il y a pour cela une méthode générale; mais je me contenterai d'écrire les résultats qu'on obtient.

D'abord on a $M = 0$, quand l'exposant α est égal ou supérieur à 4. Alors, en effet, les quatre entiers x, y, z, t ont nécessairement le facteur commun 2. Les seules valeurs à considérer sont donc

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 2, \quad \alpha = 3.$$

Pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour les nombres impairs ou simplement pairs, m ou $2m$, on déduit M de N en remplaçant $\zeta_1(m)$ par la fonction d'*Eisenstein* que je désigne par $Z_1(m)$ et qu'on tire du nombre m décomposé en facteurs premiers,

$$m = a^\mu b^\nu \ldots c^\varpi,$$

en écrivant

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots(c^\varpi + c^{\varpi-1});$$

les coefficients numériques restent les mêmes. Mais outre ce change-

ment de $\zeta_1(m)$ en $Z_1(m)$, il faut, pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$, prendre ces coefficients numériques nouveaux 20 et 16.

En d'autres termes le nombre M des solutions propres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est fourni par les formules respectives

$$M = 4Z_1(m), \quad M = 8Z_1(m), \quad M = 20Z_1(m), \quad M = 16Z_1(m),$$
$$M = 0,$$

suivant que l'on a

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 2, \quad \alpha = 3 \quad \text{ou} \quad \alpha \geqq 4.$$

NOTE

SUR

LE PROBLÈME DE L'AIGUILLE ET LE JEU DU JOINT COUVERT;

Par M. E. BARBIER,
Élève de l'École Normale.

§ I. — *Généralisation du problème de l'aiguille. — Disques de différentes formes.*

1. Le problème devenu classique sous le nom de *Problème de l'Aiguille*, a été indiqué pour la première fois par Laplace.

Voici comment il est exposé dans la *Théorie analytique des Probabilités* : « On pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour » rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute les géomè- » tres n'emploieront pas ce moyen; mais comme il me donne lieu de » parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais » l'exposer en peu de mots. Imaginons un plan divisé par des lignes » parallèles, équidistantes de la quantité a; concevons de plus un cy- » lindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou » moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il » rencontrera une des divisions du plan. »

Un calcul assez simple conduit Laplace au résultat suivant :

« Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport » du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du » plan, au nombre total des projections, sera par le n° 16, à très-peu » près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonfé- » rence 2π. »

Au n° 16, Laplace explique le théorème qui fut si longtemps l'objet des méditations de Jacques Bernoulli, et qui est un des principes généraux du calcul des probabilités.

« A mesure que les événements se multiplient, leurs probabilités

» respectives se développent de plus en plus : leurs résultats moyens » et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent, convergent vers des » limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes. » La détermination de ces accroissements et de ces limites est une des » parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des » hasards. »

2. On peut, dans la question imaginée par Laplace, supposer qu'on projette des disques elliptiques, polygonaux réguliers ou de forme quelconque, au lieu du cylindre très-étroit.

M. Lamé a traité cette année, dans son cours de la Faculté des Sciences, le cas d'une pièce ronde, celui d'un disque elliptique et enfin celui de jetons polygonaux réguliers, dans la supposition que le diamètre de la pièce, le grand axe de l'ellipse et le diamètre du cercle circonscrit à la base du jeton sont plus petits que la largeur des bandes du plan sur lequel on les jette au hasard.

Les théorèmes élégants auxquels est arrivé M. Lamé sont remarquables en ce qu'ils se résument dans le seul énoncé suivant :

La probabilité de la rencontre d'un disque elliptique ou d'un jeton polygonal régulier, dont le contour a une longueur l, avec une des lignes de division d'un plan distantes d'une quantité a, est $\frac{l}{\pi a}$.

Le cas d'un cylindre très-étroit peut être considéré comme le cas limite d'un disque elliptique qui s'allonge de plus en plus [*].

L'expression $\frac{l}{\pi a}$ étant indépendante de la forme des ellipses et du nombre des côtés du polygone régulier qui servent de base aux disques ou aux jetons, ce fait m'a conduit à penser que les théorèmes considérés par M. Lamé pouvaient n'être que des théorèmes particuliers compris dans un seul théorème général qui résout la question suivante :

Soit un disque convexe de forme quelconque qui ne puisse, dans

---

[*] On trouve dans le *Calcul intégral* de Todhunter publié en 1855 le problème du disque elliptique. Le résultat $\frac{l}{\pi a}$ est indiqué par l'auteur anglais

aucune de ses positions sur le plan, rencontrer à la fois plusieurs lignes de division. Qu'elle sera la probabilité de la rencontre?

On peut prouver qu'elle est $\frac{l}{\pi a}$, *l étant la longueur du contour du disque, en s'appuyant sur diverses considérations.* Celle de l'espérance mathématique m'a été obligeamment indiquée par M. Bertrand. Je la préférerai ici, parce qu'elle est plus habituelle dans l'analyse des hasards.

3. Afin de rendre la démonstration plus nette, nous considérerons d'abord un jeton dont la base est un polygone convexe formé par m cotés égaux de longueur c. Il est évident que tous les côtés du disque ont la même chance de rencontre; par conséquent, si le premier côté appartient à un premier joueur, le second côté à un second joueur, etc., et si un côté, coupé par une ligne du plan, amène un gain fixe au joueur qui le possède, tous les joueurs ont la même espérance mathématique E avant chaque coup.

L'espérance mathématique d'une personne A qui aurait acheté toutes ces espérances en nombre m, serait égale à mE.

Un individu B qui aurait acheté l'espérance mathématique que donne une ligne convexe composée de n côtés c, posséderait une espérance mathématique nE.

L'espérance mathématique que donne un contour formé de côtés c est donc proportionnelle au nombre de ces côtés.

Il résulte de là que l'espérance mathématique ne changerait pas, si l'on déformait le polygone en conservant les mêmes côtés.

Je dis de plus que si le disque est convexe la probabilité de la rencontre est dans le même cas, en supposant toujours que le disque ne puisse rencontrer plusieurs parallèles à la fois.

En effet, de deux choses l'une, ou on ne gagnera rien, ou on gagnera deux fois la prime, puisqu'une ligne convexe est rencontrée nécessairement en deux points par une droite qui la rencontre.

Or on sait que l'espérance mathématique s'obtient en faisant la somme des produits de la prime par la probabilité d'un événement heureux, du double de la prime par la probabilité de deux événements heureux, du triple de la prime par la probabilité de trois événements heureux, etc.

Comme le second terme de cette somme existe seul dans le cas parti-

culier qui nous occupe, la probabilité de la rencontre est comme l'espérance mathématique proportionnelle au nombre des côtés c.

Par suite le théorème de M. Lamé sur les contours polygonaux réguliers s'étend à tous les polygones à côtés égaux.

Une induction ordinaire en mathématiques nous permet d'étendre à une ligne quelconque ce théorème démontré dans le cas de polygones à côtés égaux aussi petits que l'on veut.

4. Nous venons de voir qu'un disque convexe, ne pouvant rencontrer à la fois plusieurs lignes du plan sur lequel on le jette, la probabilité de sa rencontre avec les lignes du plan est donnée par l'expression $\frac{l}{\pi a}$.

Je vais ramener à ce cas celui d'un disque non convexe. Pour cela nous imaginerons un fil qui le serre et donne la longueur l de la ligne la plus courte qui l'entoure, et en étendant le disque, nous comblerons les vides compris entre le disque primitif et le fil; la probabilité de la rencontre du disque convexe ainsi obtenu ne sera évidemment ni plus grande ni plus petite que celle du disque proposé.

5. Pour avoir considéré tous les cas possibles, il nous reste à supposer un disque qui puisse rencontrer à la fois plusieurs lignes du plan sur lequel on joue au joint couvert.

Nous pouvons, d'après le numéro précédent, nous borner à examiner le cas d'un disque convexe; c'est ce que nous ferons.

Nous pourrons calculer la chance de la rencontre au moyen de l'intégrale $\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi}\frac{A}{2}dp$, dans laquelle il faut supposer que $\frac{A}{2}$ désigne la projection du contour du disque, sur une droite faisant l'angle p avec une droite fixe, seulement toutes les valeurs de A supérieures à a doivent être comptées comme égales à a. Le calcul se ferait par l'application de la méthode de Lejeune-Dirichlet.

Cauchy a fait remarquer que l'intégrale $\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}A\,dp$ dans laquelle A désigne la somme arithmétique des projections d'une ligne sur une direction qui fait l'angle p avec une direction fixe, donne la longueur de la courbe.

Cette intégrale représente aussi le produit par $\frac{\pi}{2}$ de la moyenne des valeurs de A. Or il est facile de voir que cette moyenne est proportionnelle à la probabilité de la rencontre, toutes les fois que $\frac{A}{2}$ ne dépasse jamais a; donc les théorèmes de M. Lamé et le théorème général que j'ai donné se déduisent très-simplement de cette proposition de Cauchy.

Cette proposition a été d'abord insérée en 1832 dans un cahier lithographié, puis imprimée dans les *Comptes rendus* de 1841; Cauchy, dans un autre volume des *Comptes rendus*, en a démontré d'autres non moins simples, et il en a tiré plusieurs conséquences auxquelles j'étais moi-même arrivé au moyen des probabilités. Cette identité de résultats me conduisit au rapprochement qu'on vient de lire entre le théorème du n° **2** et une proposition de Cauchy.

6. Avant de passer à une nouvelle généralisation du problème de l'aiguille, je crois devoir dire quelques mots de la marche qu'on pourrait suivre pour présenter de la manière la plus élémentaire la solution du *problème du disque* dans tous les cas.

Il suffit de traiter d'abord le cas si simple de la pièce ronde, puis de faire les remarques qui permettent de déformer un contour, et l'on aura, sans même avoir une seule intégration à effectuer, la solution dans le cas de disques qui ne peuvent rencontrer qu'une seule ligne du plan sur lequel on les jette.

La solution complète du problème du jeu du joint couvert est plus élémentaire que la solution du problème de l'aiguille, puisque nous n'avons besoin à la rigueur que du cas le plus simple de tous, celui de la pièce ronde et de raisonnements d'une extrême facilité, même pour les personnes les plus étrangères aux mathématiques.

§ II. — *Généralisation du problème de l'aiguille. — Divisions quelconques du plan. — Problèmes analogues au problème de l'aiguille.*

1. Dans le paragraphe précédent nous avons toujours supposé qu'un disque était jeté sur un parquet, formé de bandes égales indéfinies;

on pourrait se proposer le cas où le disque serait remplacé par un fil flexible de longueur l; le seul théorème simple auquel on puisse arriver sans aucune hypothèse sur la manière de jeter le fil est celui-ci :

Le nombre des intersections qu'on peut mathématiquement espérer entre le fil et les joints du parquet est $\frac{l}{\pi a}$, *ce qui veut dire que d'après le théorème de Jacques Bernoulli la moyenne du nombre d'intersections a pour limite* $\frac{l}{\pi a}$ *quand le nombre des coups augmente indéfiniment, ou encore, la moyenne oscille indéfiniment autour de cette quantité* $\frac{l}{\pi a}$.

Ce résultat moyen $\frac{l}{\pi a}$ s'obtient par des raisonnements que je n'ai pas besoin de reproduire, ils ont été donnés au n° 3 du § I.

Je vais supposer que sur le plan où le fil est jeté, on considère non plus des lignes droites, mais un fil réparti sur la surface, de manière que chaque mètre carré en contienne L mètres, ce fil affectant une forme quelconque d'ailleurs et variable avant chaque coup.

Pour faire voir que la forme du fil, compris dans chaque mètre carré, n'influe pas sur la limite de la moyenne du nombre d'intersections d'un fil de longueur l qu'on jette sur le plan, nous irons du simple au composé comme nous l'avons fait au n° 3 du § I.

Nous supposerons d'abord qu'on jette une aiguille sur le plan, et qu'un dessin que nous tracerons dans un mètre carré pris sur le plan se répète fidèlement dans tous les mètres carrés juxtaposés pour former un plan indéfini.

1°. Mettons dans un mètre carré une ligne droite de longueur d, supposons la limite de la moyenne du nombre d'intersections de l'aiguille avec ces lignes d égale à m.

Changeons de place la ligne d, toutes les autres sont supposées se déplacer en même temps, la moyenne m reste constante.

2°. Considérons n droites égales à d dans un mètre carré, la moyenne sera évidemment mn, si on compte les intersections de l'aiguille qu'on jette avec toutes ces droites, etc. ; bref, des raisonnements simples comme ceux du n° 3 du § I nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

2. Théorème I. — *Un plan contient par mètre carré un fil flexible de longueur* L *mètres, affectant une forme variable, on y jette au hasard un fil flexible de longueur l mètres, la moyenne du nombre des points d'intersection oscille indéfiniment, quel que soit le nombre des épreuves, autour de* $\frac{2Ll}{\pi}$.

Nous dirons toujours, dans ce qui va suivre, *moyenne* au lieu de *limite de moyenne*, ou de *nombre autour duquel la moyenne oscille indéfiniment*. Avant de donner quelques énoncés de théorèmes de moyennes, il est utile de fixer le sens de deux expressions.

1°. Une direction quelconque dans un plan est celle du rayon d'un cercle situé dans ce plan, qui prend indifféremment toutes les orientations possibles.

2°. Une direction quelconque dans l'espace est celle du rayon mené à un point de la surface d'une sphère, qui prend indifféremment toutes les positions possibles sur cette surface [*].

La moyenne des projections d'une ligne plane l sur une direction quelconque du plan est $\frac{2l}{\pi}$, comme pour le cercle.

---

[*] Une aiguille H horizontale, mobile autour d'un axe vertical qui la traverse en son centre de gravité, lancée de manière à faire un assez grand nombre de tours, s'arrête dans une direction, justement réputée *quelconque* dans le plan horizontal.

Il est bien entendu que l'aiguille n'est pas magnétique.

Au moyen de conventions faciles à imaginer, la même aiguille H nous déterminera un méridien *quelconque* d'une surface de révolution, un point *quelconque* d'un cercle ou d'une ligne de longueur donnée.

Un point d'une sphère, situé en un point quelconque d'un méridien quelconque, peut occuper *toutes les positions possibles* sur la sphère; mais il n'y est pas *quelconque*, il se portera de préférence vers les pôles.

Mais un point d'un méridien *quelconque* projeté en un point *quelconque* de la ligne des pôles d'une sphère peut être censé *quelconque* sur la sphère. L'aiguille H peut donc servir à déterminer un point quelconque d'une sphère par suite une direction quelconque dans l'espace.

Remarque. L'équivalence des zones de même hauteur dans la sphère fait voir qu'une surface plane prenant *indifféremment* toutes les directions possibles, se projette sur un plan fixe de manière que sa projection ait *indifféremment* toutes ses valeurs possibles.

Il s'agit de la *somme arithmétique* des projections, la même remarque s'applique aux théorèmes suivants.

La moyenne des projections d'une surface, sur un plan dont l'axe a une direction quelconque, est $\frac{1}{2}$ comme pour la sphère.

La moyenne des projections d'une ligne l sur une direction quelconque est $\frac{l}{2}$.

La moyenne des projections d'une ligne l sur un plan dont l'axe est une direction quelconque, est $\frac{\pi l}{4}$.

3. Théorème II. — *Supposons un espace indéfini, divisé par la pensée en cubes de 1 mètre de côté, et chacun de ces mètres cubes contenant s mètres carrés d'une étoffe (qui peut n'être pas développable sur un plan); un fil de longueur l, passé au hasard dans cet espace, traverse moyennement l'étoffe en* $\frac{Sl}{2}$ *points.*

Ce théorème donne à peu près la moyenne du nombre de feuilles traversées par une flèche très-fine qui parcourt une distance connue à travers un feuillage.

Théorème III. — *Chaque mètre cube d'un espace indéfini est traversé par un fil de* L *mètres de longueur; une étoffe de s mètres carrés est traversée moyennement en* $\frac{Ls}{2}$ *points par le fil.*

Ce théorème résout à peu près cette question : Un bassin renferme un acide qui peut altérer une étoffe; le liquide distille par un certain nombre de trous. Combien de points d'une surface connue de cette étoffe ont été altérés par des gouttes d'acide?

Théorème IV. — *Supposons enfin que chaque mètre cube de l'espace renferme* S *mètres carrés de surfaces, la longueur moyenne de la courbe d'intersection de ces surfaces, par une surface de s mètres carrés, est* $\frac{3\pi Ss}{2}$.

Nous allons faire une remarque générale sur tous les résultats moyens d'un nombre infini de résultats également possibles. Soit A le résultat

moyen, B le résultat obtenu à un coup donné : deux joueurs peuvent convenir que lorsque B est plus grand que A, le premier joueur gagne une somme proportionnelle à la différence; quand A est au contraire plus grand que B, le second joueur gagne une quantité proportionnelle à la différence. Ces deux joueurs joueraient un jeu équitable. La fortune de ces deux joueurs étant extrêmement grande, il est très-probable que toutes les péripéties du jeu se borneront à des oscillations de fortune. On pourrait dans un cours de probabilités faire cette remarque à la suite du théorème de Bernoulli, en ajoutant immédiatement que par suite des alternatives inévitables de gain et de perte, une très-grande fortune englobera très-probablement une fortune médiocre, ce qui conduit aux remarques connues sur les risques des joueurs de profession.

Dans le paragraphe suivant, je rassemblerai des remarques de diverses natures sur les théorèmes de moyennes énoncés précédemment.

§ III. — *Remarques diverses sur les théorèmes précédents.*

1. Une ligne convexe est moindre que toute ligne qui l'enveloppe.

Cette proposition de géométrie plane revient à cette remarque évidente : Toute ligne droite qui rencontre la ligne concave la coupe en deux points au plus, et coupe en deux points au moins la ligne enveloppante. La moyenne du nombre d'intersections de ces deux courbes tracées sur un même disque, qu'on jette sur un même plan, dans lequel sont tracées des droites indéfinies, est plus élevée pour la ligne enveloppante que pour la ligne convexe enveloppée; d'où l'inégalité des deux lignes.

2. Si une ligne E et une ligne I étaient tracées sur le disque, et si on était certain : 1° qu'une droite ne peut rencontrer la ligne I qu'en *n points au plus*, 2° que toute droite qui rencontre I rencontre *nécessairement* E en m points au moins, le rapport des longueurs $\frac{E}{I}$ serait plus grand que $\frac{m}{n}$.

On justifierait cette assertion $\frac{E}{I} > \frac{m}{n}$ comme on a justifié (par une singulière méthode, je l'avoue) l'inégalité de la ligne enveloppante et de la ligne enveloppée.

L'inégalité $\frac{E}{I} > \frac{m}{n}$ a été remarquée par Cauchy, dans une des Notes que j'ai signalées précédemment.

3. Si une ligne droite ne pouvait rencontrer *en plus de n points* une surface I, et si toute ligne qui rencontre I rencontrait *forcément* E en m points ou plus, le rapport des surfaces $\frac{E}{I}$ serait plus grand que $\frac{m}{n}$.

Je crois que ce théorème n'a pas été remarqué. Les théorèmes de moyennes permettent d'énoncer les propositions suivantes, dont ils donnent les démonstrations les plus simples.

4. Je suppose que, des deux surfaces S_1 et S_2, la première S_1 soit coupée par un plan quelconque suivant une courbe plus longue que la courbe suivant laquelle le même plan coupe S_2. S_1 est la plus grande des deux surfaces.

Legendre (p. 247, 14[e] édition), dans sa *Géométrie*, admet, il me semble, cette notion pour démontrer que « la surface convexe du » cylindre est plus grande que la surface convexe de tout prisme » inscrit, et plus petite que celle de tout prisme circonscrit. »

5. Le théorème suivant, un des plus évidents théorèmes de moyennes qu'on puisse imaginer, justifie une notion commune qui n'est pas évidente dans tous les cas. Je suppose que chaque mètre cube de l'espace renferme S^{mq} de surface; cette surface laissera en moyenne, dans un volume v, Sv^{mq}.

Ce théorème justifie la notion de l'inégalité $V_1 > V_2$ de deux volumes V_1 et V_2 tels, que tout plan coupe V_1 suivant une section plus grande que la section de V_2 par le même plan.

6. Nous n'avons donné que des théorèmes d'inégalité; mais nous aurions aussi bien pu faire des remarques sur les rapports approximatifs des volumes et des surfaces, d'après le rapport des sections et des dimensions obtenues en les coupant par une infinité de plans ou en les perçant par une infinité de droites.

On peut se demander s'il n'y a pas une espèce de section moyenne, de dimension moyenne, correspondante à une surface ou à un volume donné; c'est ce que nous allons examiner.

7. Soit un volume V et un nombre infini de points P distribués d'une manière homogène dans ce volume ; si par chacun de ces points P on mène des droites orientées de toutes les manières, la moyenne de toutes les portions de ces droites interceptées dans le volume V peut être prise comme une espèce de dimension moyenne. Cette moyenne ne dépend-elle que du volume? Si par chaque point P on considérait des plans ayant toutes les orientations possibles, la moyenne de ces sections sera-t-elle indépendante de la forme du volume V?

Cette dimension moyenne, cette section moyenne dépendent de la forme du volume, et c'est pour la sphère qu'elles sont maximum.

Nous allons, en étudiant des courbes et des surfaces convexes, dont la propriété caractéristique peut se rendre en langage ordinaire par ces mots : *égalité de largeur en tous sens,* trouver une propriété de maximum de la sphère plus digne que la précédente d'être remarquée.

8. *Courbes planes ayant la même largeur en tous sens.* — J'entends par là les courbes convexes telles, que deux tangentes parallèles sont à une distance constante l'une de l'autre, quelle que soit leur direction.

Pour vérifier que le soleil est un disque circulaire à nos yeux, le procédé qu'on emploie est une vérification de cette égalité de largeur en tous sens. Ce procédé, complétement satisfaisant pour la question d'astronomie, est-il aussi satisfaisant pour la question de mathématiques qui s'y rattache? En un mot, toute courbe convexe, de même largeur en tous sens, est-elle une circonférence de cercle? Telle est la question qu'on se pose naturellement.

M. Puiseux met en évidence qu'il y a d'autres courbes que le cercle ayant cette propriété, que la distance de deux tangentes est indépendante de leur direction commune, en citant l'exemple suivant :

Le grand axe partage une ellipse en deux parties superposables; considérons l'une des moitiés, et sur toutes ses normales portons une longueur égale au grand axe de l'ellipse : le lieu des points ainsi déterminés se raccorde toujours avec la demi-ellipse, et l'ensemble donne *souvent* une ligne convexe d'une largeur égale au grand axe de l'ellipse dans tous les sens.

Nous pouvons, sur les courbes convexes C telles, que deux tangentes

soient à une même distance c, quelle que soit leur direction commune, faire les remarques importantes suivantes :

1°. Toutes ces lignes ont même longueur, puisque au jeu du joint couvert, sur un parquet à bandes parallèles, elles auraient la même chance.

2°. Toute ligne C se compose de deux arcs ayant une développée commune.

En effet, quand un système de droites parallèles se meut, les points de contact de ces droites avec leur enveloppe sont sur une même perpendiculaire à leur direction commune. La considération du centre instantané de rotation du système met ce fait en évidence; il suffit de considérer le système des deux tangentes à la courbe C pour voir qu'elle se compose de deux arcs ayant même développée, puisque leurs normales sont communes.

3°. La développée commune est une courbe telle, qu'on peut lui mener une tangente parallèle à une direction quelconque, et qu'on ne peut lui en mener qu'une. L'enveloppe d'une droite D, qui est à égale distance de deux tangentes parallèles, jouit de la même propriété.

La développée des courbes C peut renfermer des portions de droite; alors le rayon de courbure des courbes C ne varie pas d'une manière continue. L'enveloppe des droites D ne peut contenir de partie droite, sinon la courbe C se composerait de deux droites parallèles indéfinies.

Voyons comment nous pourrons trouver des développées de courbes ayant même longueur en tous sens; la construction des courbes C sera ensuite facile à concevoir. Considérons un arc convexe dont la flexion totale soit de 180 degrés; on peut décomposer cet arc en parties qu'on réunira par des points de rebroussement de première espèce, de manière à avoir une courbe fermée composée d'arcs convexes séparés par des rebroussements de première espèce. On obtiendra ainsi une développée de courbes C, par exemple l'ensemble de la demi-ellipse et d'une autre courbe parallèle que nous avons considérée plus haut aura pour développée la moitié de celle d'une ellipse fermée par une droite.

Si l'on réunissait trois arcs de courbe par des points de rebrousse-

ment, les courbes C qui auraient l'ensemble de ces trois arcs pour développées, auraient un rayon de courbure variant d'une manière continue. On peut imaginer les formes les plus bizarres pour cette développée, chacune donnera toujours un ensemble de courbes C; il n'est pas une seule courbe C dont la développée ne puisse être ainsi obtenue, de sorte que nous venons de faire une théorie assez complète de ces courbes de même largeur en tous sens.

La première propriété que nous en avions donnée, savoir que leur *longueur* ne dépend que de leur *largeur*, se démontre facilement après qu'on a remarqué qu'une courbe C se compose de deux arcs parallèles. Mais nous avions prévu cette propriété avant de rien connaître sur ces courbes, si ce n'est leur définition même.

Nous allons considérer maintenant les surfaces ayant même largeur en tous sens : nous aurons quelques nouvelles remarques à faire, qui ne sont pas, je crois, dépourvues d'intérêt.

9. *Surfaces ayant même largeur en tous sens.* — J'entends par là les surfaces convexes qui, comme la sphère, ont deux plans tangents parallèles quelconques à une distance constante.

On peut, en faisant tourner certaines courbes C qui ont un axe de symétrie autour de cet axe, engendrer de pareilles surfaces.

A la vérité, ces surfaces que nous venons d'engendrer sont de révolution ; mais on en conçoit d'autres en nombre infini.

En effet, imaginons, ce qui ne coûte aucun effort, une surface dont une courbe C soit une ligne géodésique ; considérons la portion de cette surface qui se trouve d'un côté de la ligne C, et portons sur toutes ses normales une distance égale à la largeur de la ligne C; nous compléterons cette portion de surface par une autre portion qui se raccordera avec elle : l'ensemble sera souvent une surface convexe, et alors ce sera une des surfaces S, que nous caractérisons en disant qu'elles ont même largeur en tous sens.

On pourrait penser, par analogie avec la première propriété des courbes C, que les surfaces S ont une égale étendue si elles ont même largeur ; il n'en est rien.

En effet, *la projection d'une surface* S est une courbe C aussi longue que le cercle, mais moins grande en surface ; donc *la surface des vo-*

lumes convexes de même largeur en tous sens dépend de leur forme. La sphère a la plus grande surface parmi ces volumes.

Il me paraît difficile de démontrer cette proposition par d'autres principes que ceux que j'ai employés.

Voici encore une propriété des courbes C qui ont un axe de symétrie qu'on aurait probablement une certaine peine à démontrer, indépendamment de ces mêmes principes.

De toutes les courbes C, la circonférence de cercle est celle dont la moitié a le centre de gravité le plus éloigné de l'axe.

La même proposition peut se dire aussi des centres de gravité des demi-surfaces.

Ces deux propositions se démontrent par le théorème dit de *Guldin*, en les ramenant à la comparaison des surfaces et des volumes engendrés par la révolution des courbes C.

10. Je terminerai cette Note en indiquant l'usage de ces courbes de même largeur en tous sens pour la solution du problème traité au n° 5 du § I.

Quand un disque est dans certains sens plus large que les bandes du plan sur lequel on le jette, *il peut arriver* qu'en le faisant tourner de 180°, en le laissant tangent à une limite d'une bande, l'autre limite de la bande enveloppe une courbe située tout entière sur le disque ; si alors le disque, réduit de toute la portion touchée par la seconde limite, reste convexe, il a la même chance de rencontre que le disque primitif. Dans ce cas, l mesurant le contour du disque obtenu, la probabilité de la rencontre sera $\frac{l}{\pi a}$.

ÉGALITÉS

ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE E(x);

Par M. J. LIOUVILLE.

Je désigne ici par E(x) l'entier contenu dans x, en sorte que si l'on pose

$$x = \mathrm{E}(x) + r,$$

le reste r se réduira à zéro quand x sera un entier, mais dans tous les autres cas aura une valeur positive essentiellement plus petite que 1.

Cela posé, soit m un nombre impair donné. Désignons par s un entier impair qui prenne les valeurs successives 1, 3, 5, 7,..., m, et formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{m+s}{2s}\right),$$

relative à ces diverses valeurs de s. Il est clair que dans cette somme les termes sont alternativement positifs et négatifs : quant aux quantités placées sous le signe E, ce sont des fractions rationnelles.

Au contraire, les termes sont tous positifs, et il entre sous le signe E, un radical carré, dans la somme

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right),$$

où t est un entier impair auquel on donne les valeurs successives 1, 3, 5, 7,..., en ayant soin de s'arrêter au moment où l'on cesserait d'avoir

$$2m - t^2 > 0:$$

la dernière valeur de t est donc la racine du plus grand carré impair contenu dans $2m$.

Cela posé, le premier des deux théorèmes que je veux énoncer ici

consiste en ce que les deux sommes indiquées sont égales, à savoir :

$$\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{m+s}{2s}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right).$$

Soit comme exemple $m=9$: notre équation exprime que les deux quantités

$$\mathrm{E}\left(\frac{9+1}{2}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{9+3}{6}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{9+5}{10}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{9+7}{14}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{9+9}{18}\right)$$

et

$$\mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right)$$

ont la même valeur, ce qui est vrai, la valeur commune étant 4.

Maintenant désignons par n un entier quelconque pair ou impair, puis supposons encore s impair et prenant les valeurs 1, 3, 5, etc., sans dépasser n. D'un autre côté soit θ un entier prenant toutes les valeurs paires ou impaires 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., sans que jamais son carré dépasse ni même atteigne ce même nombre n. On aura cette seconde égalité :

$$\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{n}{s}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\sqrt{m-\theta^2}\right).$$

Ainsi, pour $n=4$, il vient

$$\mathrm{E}\left(\frac{4}{1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{4}{3}\right) = \mathrm{E}(\sqrt{4}) + \mathrm{E}(\sqrt{3}),$$

ce qui est exact.

La démonstration des deux égalités ci-dessus s'offrira d'elle-même à tous ceux qui sont un peu au courant de la théorie des nombres, en particulier de ce qui concerne les décompositions d'un entier en deux carrés. Aussi ne les ai-je données que comme un sujet d'exercices pour les jeunes géomètres. Il serait, en effet, à désirer qu'on les établît directement sans recourir à la théorie des nombres.

SUR

LE NOMBRE DES CLASSES DIFFÉRENTES

DE FORMES QUADRATIQUES A DÉTERMINANTS NÉGATIFS;

PAR M. KRONECKER.

(JOURNAL DE CRELLE, tome LVII, page 248.)

(TRADUCTION DE M. HOUEL.)

L'étude des fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication complexe, m'a fait connaître des formules extrêmement remarquables pour le nombre des différentes classes non équivalentes de formes quadratiques à déterminants négatifs. J'ai déjà publié quelques-unes de ces formules dans une Note imprimée dans le *Compte rendu de l'Académie de Berlin* du mois d'octobre 1857; et dans cette Note, ayant seulement en vue de faire ressortir le caractère général de ces formules, je n'ai inséré que celles qui pouvaient être représentées par les notations les plus simples. Dans le Mémoire actuel, je vais présenter *toutes* les formules en question, et pour cela j'établirai les notations suivantes :

Je désignerai par

n un nombre entier positif quelconque;

m un nombre positif impair quelconque;

r un nombre positif quelconque de la forme $8k-1$;

s un nombre positif quelconque de la forme $8k+1$.

Soient, de plus,

$G(n)$ le nombre de toutes les classes non équivalentes de formes quadratiques, pour le déterminant $-n$;

$F(n)$ le nombre des classes différentes des formes quadratiques de déterminant $-n$, et *telles*, que l'un au moins des deux coefficients extrêmes soit impair;

$X(n)$ la somme de tous les diviseurs *impairs* de n;

$\Phi(n)$ la somme de *tous* les diviseurs de n;

$\Psi(n)$ le nombre dont la somme des diviseurs de n qui sont plus grands que $\sqrt{n}$ surpasse la somme de ceux qui sont moindres que $\sqrt{n}$;

$\Phi'(n)$ la somme des diviseurs de n qui sont de la forme $8k \pm 1$, diminuée de la somme de ceux qui sont de la forme $8k \pm 3$;

$\Psi'(n)$ la somme des diviseurs $8k \pm 1$ plus grands que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$ moindres que $\sqrt{n}$, diminuée de la somme des diviseurs $8k \pm 1$ moindres que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$ plus grands que $\sqrt{n}$;

$\varphi(n)$ la quantité dont le nombre des diviseurs de la forme $4k+1$ surpasse le nombre des diviseurs de la forme $4k-1$;

$\psi(n)$ la quantité dont le nombre des diviseurs de la forme $3k+1$ surpasse le nombre des diviseurs de la forme $3k-1$;

$\varphi'(n)$ la moitié du nombre des solutions différentes de l'équation $n = x^2 + 64y^2$, et

$\psi'(n)$ la moitié du nombre des solutions différentes de l'équation $n = x^2 + 3.64y^2$ en nombres entiers, en considérant comme solutions différentes les valeurs positives et négatives de x et de y, et tenant compte aussi des valeurs nulles de ces inconnues.

D'après ces conventions, les relations que fournit la théorie des fonctions elliptiques pour les nombres de classes des formes quadratiques à déterminants négatifs, peuvent s'exprimer comme il suit :

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(4n) + 2F(4n-1^2) + 2F(4n-2^2) + 2F(4n-3^2) + \ldots \\ &\qquad = 2X(n) + \Phi(n) + \Psi(n), \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(2m) + 2F(2m-1^2) + 2F(2m-2^2) + 2F(2m-3^2) + \ldots \\ &\qquad = 2\Phi(m) + \varphi(m), \end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(2m) - 2F(2m-1^2) + 2F(2m-2^2) - 2F(2m-3^2) + \ldots \\ &\qquad = -\varphi(m), \end{aligned}\right.$$

$$(\text{IV})\quad \begin{cases} 3G(m)+6G(m-1^2)+6G(m-2^2)+6G(m-3^2)+\ldots \\ \qquad = \Phi(m)+3\Psi(m)+3\varphi(m)+2\psi(m), \end{cases}$$

$$(\text{V})\quad \begin{cases} 2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+4F(m-3^2)+\ldots \\ \qquad = \Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m), \end{cases}$$

$$(\text{VI})\quad \begin{cases} 2F(m)-4F(m-1^2)+4F(m-2^2)-4F(m-3^2)+\ldots \\ \qquad = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\left[\Phi(m)-\Psi(m)\right]+\varphi(m), \end{cases}$$

$$(\text{VII})\quad \begin{cases} 2F(r)-4F(r-4^2)+4F(r-8^2)-4F(r-12^2)+\ldots \\ \qquad = (-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}\left[\Phi'(r)-\Psi'(r)\right], \end{cases}$$

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} 4\sum(-1)^{\frac{1}{16}(s-k^2)}\left[2F\left(\frac{s-k^2}{16}\right)-3G\left(\frac{s-k^2}{16}\right)\right] \\ \qquad = (-1)^{\frac{1}{8}(s-1)}\left[\Phi'(s)-\Psi'(s)\right]+\varphi(s)+4\psi(s) \\ \qquad\quad -4\varphi'(s)-8\psi'(s). \end{cases}$$

Dans les sept premières de ces formules, la suite des fonctions F et G ne doit être prolongée qu'autant que les nombres correspondants ne deviennent pas négatifs; ainsi, en désignant par exemple par $F(4n-k^2)$ le dernier terme de la première formule, le nombre k est déterminé par la condition

$$k^2 \leqq 4n.$$

Dans la dernière formule (VIII), le signe de sommation se rapporte à tous les nombres positifs différents k, pour lesquels $\frac{1}{16}(s-k^2)$ est entier et supérieur ou égal à zéro; enfin, dans toutes les formules il faut poser

$$F(0)=0,\quad G(0)=\frac{1}{4}.$$

Pour les fonctions arithmologiques F et G, on a, en outre, les relations fondamentales suivantes, qui se tirent également de la théorie des

fonctions elliptiques, mais que l'on peut établir aussi par de simples considérations arithmétiques :

$$F(4n) = 2F(n)$$

pour toute valeur de n, avec cette seule exception que, si n est un carré impair, on a $F(4n) = 2F(n) - 1$;

$$G(4n) = F(4n) + G(n),$$

pour toute valeur de n;

$$G(n) = F(n),$$

quand n donne, pour le module 4, le reste 1 ou 2;

$$G(n) = 2F(n),$$

lorsque $n \equiv 7 \pmod{8}$;

$$3G(n) = 4F(n),$$

lorsque $n \equiv 3 \pmod{8}$, avec cette exception que, lorsque n est le triple d'un carré impair, on a

$$3G(n) = 4F(n) + 2.$$

Ensuite, le nombre des classes $F(n)$ est égal à la somme des nombres de classes *proprement primitives* des formes quadratiques pour tous les déterminants $-\nu$ qui sont diviseurs de n, et pour lesquels le quotient $\frac{n}{\nu}$ est un carré impair. Il s'ensuit que des huit formules ci-dessus, relatives aux nombres de classes F et G, on peut déduire les formules correspondantes suivantes, relatives à la fonction $f(n)$ qui exprime le nombre des classes proprement primitives des formes quadratiques de déterminant $-n$:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots \\ & \qquad = 4\mathrm{X}(n) + 2\Phi(n) + 2\Psi(n), \end{aligned} \right.$$

u_k désignant le nombre de toutes les représentations possibles du

nombre $4n$ par la forme

$$x^2 + k(2y+1)^2,$$

de sorte que, u_k étant $=0$ lorsque $k > 4n$, la série du premier membre se termine. Ce nombre de représentations est d'ailleurs, ici comme dans tout ce qui va suivre, pris dans le sens ordinaire, de sorte qu'il faut entendre par là le nombre des systèmes différents de valeurs entières, positives ou négatives, des indéterminées x et y, pour lesquels la représentation est possible. On a ensuite

$$(2)\quad u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots = 4\Phi(m) + \frac{1}{2}u_1,$$

$$(3)\quad u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \ldots = \frac{1}{2}u_1,$$

u_k désignant le nombre des représentations de $2m$ par la forme

$$x^2 + k(2y+1)^2.$$

De plus,

$$(4)\quad \begin{cases} 3\sum u_i f(i) + \sum [2 + (-1)^i] u_{4i-1} f(4i-1) \\ \qquad = 2\Phi(m) + 6\Psi(m) + \frac{1}{2}(u_0 + 3u_1), \end{cases}$$

les sommations s'étendant à tous les nombres positifs i, et u_k désignant le nombre des représentations de m par la forme $x^2 + ky^2$, pour lesquels y est différent de zéro. Ensuite

$$(5)\quad u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots = \Phi(m) + \Psi(m) + \frac{1}{2}u_1,$$

$$(6)\quad \begin{cases} u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \ldots \\ \qquad = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} [\Phi(m) - \Psi(m)] + \frac{1}{2}u_1, \end{cases}$$

u_k indiquant le nombre des représentations de m par la forme $x^2 + k(2y+1)^2$. Puis, pour $r \equiv 7 \pmod{8}$,

$$(7)\quad \begin{cases} 2\sum u_{8i-1} f(8i-1) \\ \qquad = \Psi(r) - \frac{1}{2}\Phi(r) + (-1)^{\frac{1}{8}(r+1)} [\Psi'(r) - \Phi'(r)], \end{cases}$$

la sommation s'étendant à tous les nombres positifs i, et u_k désignant le nombre des représentations de r par la forme $64x^2 + ky^2$. Enfin on a, pour $s \equiv 1 \pmod{8}$,

$$(8)\quad \begin{cases} \sum (3u_i \pm v_i) f(i) + \sum (2 \pm 1)(u_{4i-1} - v_{4i-1}) f(4i-1) \\ = (-1)^{\frac{1}{8}(s+7)} [\Phi'(s) - \Psi'(s)] + \frac{1}{2}(u_0 + 3u_1 - v_1), \end{cases}$$

les deux signes de sommation se rapportant à tous les nombres positifs i, et le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que i est pair ou impair ; u_k désignant en outre le nombre des représentations de s par la forme $x^2 + 64ky^2$, dans lesquelles y est différent de zéro, et v_k le nombre total des représentations de s par la forme $x^2 + 16k(2y+1)^2$.

Les huit formules que nous venons de donner pour les nombres de classes F, G peuvent être simplifiées de manière que les expressions φ, ψ, φ', ψ' disparaissent entièrement de leurs seconds membres, en remplaçant les fonctions arithmologiques $F(n)$, $G(n)$ par d'autres fonctions $\mathrm{F}(n)$, $\mathrm{G}(n)$, qui, pour $n = 0$, prennent respectivement les valeurs 0 et $-\frac{1}{12}$, et qui, pour toutes les valeurs positives de n, sont déterminées par les équations suivantes :

$$\mathrm{F}(4n) = F(4n),$$

pour toute valeur du nombre n;

$$\mathrm{F}(4n) = 2\mathrm{F}(n)$$

et

$$\mathrm{G}(4n) = \mathrm{F}(4n) + \mathrm{G}(n),$$

pour toute valeur positive de n;

$$\mathrm{G}(n) = \mathrm{F}(n).$$

lorsque $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$, et

$$G(n) = \left[2 + (-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}\right] F(n),$$

lorsque $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Il existe donc, pour les fonctions F et G, les *mêmes* relations fondamentales que pour les nombres de classes F et G; mais elles ne sont plus sujettes aux exceptions; et les fonctions $\mathrm{F}(n)$ et $F(n)$ sont en général identiques, pourvu que n ne soit pas un carré impair; $\mathrm{G}(n)$ et $G(n)$ sont identiques, pourvu que n ne soit pas un carré parfait ou le triple d'un carré parfait. Mais, même pour ces valeurs particulières de n, les fonctions $\mathrm{F}(n)$ et $\mathrm{G}(n)$ ont encore leur signification arithmologique immédiate, dont l'explication ici nous conduirait trop loin.

Indépendamment des changements que les formules ci-dessus (I) à (VIII) éprouvent, comme on vient de le voir, par l'introduction des fonctions arithmologiques $f(n)$, $\mathrm{F}(n)$, $\mathrm{G}(n)$ et autres, on peut encore faire subir à ces formules les transformations les plus variées, en les combinant entre elles et avec les relations fondamentales qui lient les fonctions F et G : on obtient ainsi un grand nombre de formules nouvelles et élégantes. Mais aucune des équations (I) à (VIII) ne peut *elle-même* se déduire des autres à l'aide des seules relations fondamentales, et elles forment par conséquent à cet égard un système de formules indépendantes entre elles. Parmi les équations qui résultent des combinaisons en question, je ne transcrirai que les deux suivantes, en employant, pour plus de simplicité, les fonctions F, G et posant $2\mathrm{F}(n) - \mathrm{G}(n) = \mathrm{E}(n)$:

$$(\mathrm{IX})\quad \begin{cases} \mathrm{F}(n) + \mathrm{F}(n-2) + \mathrm{F}(n-6) + \mathrm{F}(n-12) + \mathrm{F}(n-20) + \ldots \\ \qquad = \frac{1}{8}\Psi(4n+1), \end{cases}$$

$$(\mathrm{X})\quad \begin{cases} \mathrm{E}(n) + 2\mathrm{E}(n-1) + 2\mathrm{E}(n-4) + 2\mathrm{E}(n-9) + \ldots \\ \qquad = \frac{2}{3}\left[2 + (-1)^n\right] \mathrm{X}(n). \end{cases}$$

Ces deux formules subsistent pour tous les nombres positifs n. La

dernière, comme je le ferai voir plus bas, fournit les relations remarquables entre les représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés et le nombre des classes de formes quadratiques appartenant au déterminant $-n$. La formule (X) peut d'ailleurs se déduire de ces relations; elle contient aussi des propositions arithmologiques déjà connues, et seulement sous une forme nouvelle. C'est ce qui a lieu aussi pour les formules (II) et (III), et en général pour toutes les combinaisons des formules (I) à (VIII) qui font disparaître les fonctions Ψ et Ψ'. Mais les autres résultats contenus dans ces formules ne peuvent s'obtenir à l'aide des procédés arithmétiques connus jusqu'ici, et sont par conséquent entièrement nouveaux, pour le fond comme pour la forme. La différence essentielle qui se trouve ainsi établie entre les fonctions X, Φ, Φ', d'une part, et les fonctions Ψ, Ψ', de l'autre, se manifeste encore d'ailleurs dans la différence totale de nature des séries que l'on obtient en prenant ces fonctions comme coefficients d'un développement. On a, en effet,

$$\sum (2 \pm 1)\, \mathrm{X}(n)\, q^n = \sum \frac{q^n}{(1 \pm q^n)^2},$$

le signe de sommation s'étendant à toutes les valeurs positives de n depuis 1 jusqu'à ∞, et en prenant dans les deux membres le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que n est pair ou impair. On a ensuite

$$\sum \Phi(n)\, q^n = \sum \frac{nq^n}{1 - q^n} = \sum \frac{q^n}{(1 - q^n)^2},$$

$$\sum \Psi(n)\, q^n = \sum \frac{q^{n^2+n}}{(1 - q^n)^2};$$

les sommations s'étendant encore à toutes les valeurs positives de n depuis 1 jusqu'à ∞. Enfin on a

$$\sum \Phi(m)\, q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2-1)} \frac{mq^m}{1 - q^{2m}},$$

$$\sum \Psi'(m)\, q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2+7)}\, m\, \frac{q^{m^2}(1 + q^{2m}) - q^m}{1 - q^{2m}},$$

où l'on doit prendre pour m tous les nombres positifs impairs.

En combinant ces équations avec les huit formules pour les nombres de classes des formes quadratiques à déterminants négatifs, on obtient aussi ces nombres de classes sous forme de coefficients de développements. Ainsi la première et la troisième des équations précédentes, combinées avec les formules (IX) et (X), donnent les deux relations

$$\text{(XI)} \qquad \sum F(n)\, q^n = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{H(K)} \sum \frac{q^{n^2+3n+1}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$\text{(XII)} \qquad 12 \sum E(n)\, q^n = \frac{1}{\Theta(K)} + \frac{8}{\Theta(K)} \sum \frac{q^{n+1}}{(1 \mp q^{n+1})^2},$$

les sommations se rapportant à toutes les valeurs de n depuis o jusqu'à ∞, et en prenant, dans la dernière somme, le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que n est pair ou impair. Les lettres H, Θ, K, q ont ici la signification que leur a donnée Jacobi. La dernière de ces équations peut donc, à l'aide de la formule (8), page 103 des *Fundamenta* de Jacobi, se transformer dans la suivante

$$12 \sum E(n)\, q^n = [\Theta(K)]^3 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^3,$$

et il en résulte immédiatement que le nombre des représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés est égal à $12\, E(n)$. Ce résultat, fourni par la théorie des fonctions elliptiques, résume sous une forme simple les propositions de Gauss déjà citées, touchant la dépendance qui existe entre le nombre des représentations d'un nombre n par la forme $x^2 + y^2 + z^2$, et le nombre des classes différentes de formes quadratiques binaires de déterminant $-n$. De cette manière, on peut donc tirer de la *seule* théorie des fonctions elliptiques les belles propositions d'arithmétique supérieure, qui jusqu'ici étaient fondées sur les profondes considérations que renferment les *Disq. Arithm.* de Gauss. Le théorème de Fermat sur les nombres triangulaires étant une conséquence fort simple de ces propositions, peut donc aussi se déduire de la théorie des fonctions elliptiques, sans emprunter aucune préparation préliminaire à la théorie des nombres, et ainsi se trouve accompli un vœu souvent exprimé par Jacobi dans ses leçons. On sait, en effet, que ce grand mathématicien, dans sa plus importante créa-

tion analytique, la théorie des fonctions elliptiques, a trouvé en même temps une riche mine de propositions arithmologiques, et il semble s'être attaché avec prédilection au développement de cette découverte. De même qu'il avait obtenu, au moyen des séries pour les puissances paires de $\Theta(K)$, les propositions sur le nombre des décompositions d'un nombre en deux, quatre, six et huit carrés, il désirait aussi pouvoir déduire, du développement du cube de $\Theta(K)$, ou de séries analogues, les propositions sur la décomposition d'un nombre en trois carrés ou en trois nombres triangulaires. C'est ce qui se trouve maintenant réalisé dans les recherches que nous venons d'indiquer : ce n'est pas, il est vrai, par la transformation analytique directe du cube de $\Theta(K)$, mais à l'aide des modules spéciaux pour lesquels a lieu la multiplication complexe, et conséquemment toujours au moyen de considérations appartenant exclusivement à la doctrine des fonctions elliptiques.

Tout porte à croire que, de même que les fonctions arithmologiques $\mathrm{E}(n)$ et $\mathrm{X}(n)$ sont liées avec le nombre des décompositions de n en trois et en quatre carrés, de même aussi les fonctions $\mathrm{F}(n)$ et $\Psi(n)$ auront une relation analogue avec la représentation de n par des formes quadratiques à plusieurs variables. C'est au moyen seulement de cette extension de la signification arithmologique de $\mathrm{F}(n)$ et de $\Psi(n)$ que l'on peut espérer de déduire, par la voie purement arithmétique, les relations mutuelles de ces fonctions, contenues dans les huit formules ci-dessus. Il est toutefois à présumer que la propriété relative au nombre de classes $\mathrm{F}(n)$, et par suite l'établissement de ces huit formules par les procédés de la théorie des nombres, ont leurs fondements à une grande profondeur, puisque Gauss lui-même, en traitant par une méthode arithmétique si générale les formes quadratiques binaires, n'a pas été conduit à ces lois simples pour le nombre de classes de ces formes. Maintenant, du reste, que les relations existant entre les fonctions F et Ψ sont données, il ne s'agit plus que d'établir pour l'une des deux la propriété présumée, la propriété correspondante de l'autre fonction s'ensuivant immédiatement. Cette réduction d'un cas à l'autre serait importante, parce que l'analogie entre les fonctions X et Ψ d'une part, et les fonctions E et F d'autre part, conduit à admettre qu'il doit y avoir moins de distance à franchir pour

assigner la signification, quelle qu'elle soit, de $\Psi(n)$ relativement à la représentation du nombre n par une forme quadratique, que pour parvenir à la signification correspondante de $F(n)$. C'est en me fondant sur ces considérations que j'ai établi les séries ci-dessus, dans lesquelles $F(n)$ et $\Psi(n)$ entrent comme coefficients; mais je n'ai pu réussir jusqu'ici à en déduire des résultats satisfaisants pour l'extension cherchée de la signification des fonctions F et Ψ. Il semble plus facile de rechercher et d'établir par la voie purement analytique, les propriétés de la série infinie qui forme le second membre de l'équation (XI), de manière à pouvoir, à l'aide de ces propriétés, déduire de cette seule équation toutes les huit formules précédentes. On n'aurait besoin pour cela que de certaines transformations dont cette série est susceptible, en y supposant q multiplié par les différentes racines huitièmes de l'unité, transformations qui peuvent s'obtenir, d'un autre côté, à l'aide des équations (I) à (VIII).

Je ferai remarquer, enfin, que les formules (V) et (VI) sont les mieux appropriées au calcul des nombres de classes des formes quadratiques à déterminant négatif. J'ai déjà fait calculer, au moyen d'une combinaison de ces formules, la valeur de $F(m)$ pour tous les nombres impairs m, jusqu'à 10000, et le calcul n'a rien laissé à désirer sous le rapport de la facilité et de la sûreté. Le nombre des classes *proprement primitives* des formes quadratiques à déterminant négatif se déduit sans peine des valeurs calculées pour $F(m)$.

Berlin, décembre 1859.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu + 5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que je veux donner, au sujet des nombres premiers de la forme $8\mu + 5$, consiste en ce que si m désigne un tel nombre, on pourra toujours poser un nombre impair de fois (par conséquent au moins une fois) l'équation

$$m = 2x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier de la forme $8\nu + 3$, qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Ainsi, pour $m = 5$, on a

$$5 = 2 . 1^2 + 3 . 1^2.$$

De même

$$13 = 2 . 1^2 + 11 . 1^2.$$

Soit, enfin, $m = 29$: on aura la décomposition canonique

$$29 = 2 . 3^2 + 11 . 1^2.$$

Quant à la décomposition indiquée par l'équation

$$29 = 2 . 1^2 + 3^3 . 1,$$

elle ne doit pas être comptée ici, puisque l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

SUR

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16k+7$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Plusieurs fois déjà nous nous sommes occupés des nombres premiers de la forme $16k+7$. En particulier nous avons cité et démontré de nouveau ce théorème de M. Bouniakowsky, que pour tout nombre m de l'espèce indiquée on peut poser un nombre impair de fois l'équation

$$m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier de la forme $8\mu+5$, qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Or, en continuant à désigner par m un nombre premier $16k+7$, je trouve deux autres théorèmes non moins intéressants.

1°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et q un nombre premier de la forme $8\mu+3$, qui ne divise pas y.

2°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 4x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier de la forme $8\mu+3$, qui ne divise pas y.

On voit que, dans nos deux équations, le nombre premier q, au second membre, est de la forme $8\mu+3$, tandis que le nombre premier p est de la forme $8\mu+5$ dans l'équation de M. Bouniakowsky. Mais les trois équations doivent avoir lieu (et chacune un nombre impair de fois) pour chaque nombre premier m de la forme $16k+7$.

Ainsi le nombre 7 doit y satisfaire, et en effet, on a non-seulement l'équation de M. Bouniakowsky

$$7 = 2.1^2 + 5.1^2,$$

mais encore les deux suivantes :

$$7 = 1^2 + 2.3.1^2$$

et

$$7 = 4.1^2 + 3.1^2.$$

De même, on a non-seulement

$$23 = 2.3^2 + 5.1^2,$$

mais encore

$$23 = 1^2 + 2.11.1^2$$

et

$$23 = 4.1^2 + 19.1^2.$$

Il ne faut pas compter l'équation

$$23 = 3^2 + 2.7.1^2$$

comme une des nôtres, parce que le nombre premier 7 n'est pas de la forme $8\mu + 3$.

SUR

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS, L'UN DE LA FORME $8k+3$ ET L'AUTRE DE LA FORME $8h+5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Cette Note est liée en quelque sorte à la précédente. On y verra (ce qui semble curieux) que les nombres résultant du produit d'un nombre premier $8k+3$ par un nombre premier $8h+5$ jouissent de propriétés analogues à celles que nous venons d'indiquer pour les nombres premiers $16k+7$.

Prenons en effet

$$m = (8k+3)(8h+5),$$

les deux facteurs au second membre étant, nous le répétons, des nombres premiers; et nous aurons, au sujet du produit m, les trois théorèmes que voici :

1°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier $8\mu+5$, qui ne divise pas y.

2°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier $8\mu+3$ qui ne divise pas

3°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 4x^2 + q^{4l+1}y^2.$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier $8\mu + 3$, qui ne divise pas y. Partout on admet pour l la valeur zéro.

Soit comme exemple, $m = 3.5$, c'est-à-dire

$$m = 15,$$

et nos trois théorèmes se vérifieront ; car on a non-seulement l'équation

$$15 = 2.1^2 + 13.1^2,$$

mais encore les deux suivantes :

$$15 = 3^2 + 2.3.1^2,$$

et

$$15 = 4.1^2 + 11.1^2.$$

Quant à l'équation

$$15 = 1^2 + 2.7.1^2,$$

elle ne doit pas être comptée ici : elle ne rentre pas dans l'équation générale

$$m = x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

parce que le nombre premier 7 n'est pas de la forme $8\mu + 3$.

Nous venons de parler de nombres composés, tandis que jusqu'à présent nous n'avions considéré que des nombres premiers. C'est qu'en effet nos théorèmes s'étendent *mutatis mutandis* aux diverses classes de nombres composés. Mais les nombres premiers offrent un intérêt spécial, et nous leur consacrerons encore plus d'un article avant de donner à nos recherches toute la généralité qu'elles comportent.

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il est clair que la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

ne peut pas représenter les nombres impairs $4k+3$; mais elle représente tous les autres nombres, soit pairs, soit impairs, $2k$, $4k+1$, et l'on peut fixer d'une manière précise le nombre N des représentations dans chaque cas. Ici, comme pour la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

dont nous nous sommes occupés dans le cahier de *juillet*, tout dépend des théorèmes de Jacobi concernant la représentation des nombres par une somme de quatre carrés. Voici les résultats qu'on obtient : je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

1°. Pour un nombre impair m, on a, comme nous venons de le dire,

$$\mathrm{N} = 0,$$

quand m est de la forme $4k+3$; mais

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m),$$

quand m est de la forme $4k+1$. Ainsi le nombre 5 a vingt-quatre représentations, qui sont contenues dans les six équations sui-

vantes :

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$

$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$

$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2],$$

$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$

$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune fournit quatre représentations.

2°. Pour le double $2m$ d'un nombre impair quelconque m, on a encore

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 6 a seize représentations, contenues dans ces deux égalités :

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2].$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un nombre impair quelconque m, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 a huit représentations. Elles sont fournies par ces quatre équations :

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 4(0^2 + 0^2),$$

$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 4(0^2 + 0^2),$$

$$4 = 0^2 + 0^2 + 4[(\pm 1)^2 + 0^2],$$

$$4 = 0^2 + 0^2 + 4[0^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune donne deux représentations.

4°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 8, c'est-à-dire ex-

primés par $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 2$, on a

$$N = 24\zeta_1(m).$$

Ainsi 8, 16, 32, etc., ont vingt-quatre représentations.

Pour chaque nombre donné n, N est le nombre des représentations tant propres qu'impropres dont n est susceptible; en d'autres termes, N est le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

en prenant pour x, y, z, t des entiers positifs, nuls ou négatifs, absolument quelconques. Mais on peut aussi demander le nombre M des représentations propres, c'est-à-dire le nombre M des solutions que l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

conserve quand on exclut celles où les quatre entiers x, y, z, t ont un diviseur commun > 1.

Il faut, pour exprimer M, remplacer $\zeta_1(m)$ par la fonction $Z_1(m)$, qui, pour chaque entier m décomposé en facteurs premiers,

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

s'exprime par

$$Z_1(m) = (a^\alpha + a^{\alpha-1})(b^\beta + b^{\beta-1}) \ldots (c^\gamma + c^{\gamma-1}).$$

Les coefficients numériques varient d'ailleurs ainsi qu'il suit :

1°. Pour un nombre impair m, on a

$$M = 0,$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k + 3$ ou de la forme $4k + 1$.

2°. Pour le double $2m$ d'un entier impair quelconque m, on a

$$M = 4Z_1(m).$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un entier impair m, on a

$$M = 8Z_1(m),$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k+3$ ou de la forme $4k+1$.

4°. Pour l'octuple $8m$ d'un nombre impair quelconque m, on a

$$M = 20Z_1(m).$$

5°. Pour $16m$, m étant un entier impair quelconque, on a

$$M = 16Z_1(m).$$

6°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 32, on a

$$M = 0.$$

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k + 11$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Voici, au sujet des nombres premiers $24k + 11$, un théorème nouveau qu'on pourra joindre à celui que j'ai déjà donné dans le cahier de *mai*, à savoir que, si d'un nombre donné de cette espèce on retranche les carrés impairs de grandeur moindre qui ne sont pas divisibles par 3, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2q^{4l+1}y^2,$$

y étant un entier impair, et q un nombre premier $12g + 5$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, pour chaque nombre premier donné m, de la forme $24k + 11$, on peut poser un nombre impair de fois l'équation

$$m = x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant impairs, x non divisible par 3, et q étant un nombre premier $12g + 5$ qui ne divise pas y.

Au reste on pourrait supprimer la condition relative à x de ne pas être divisible par 3; car avec les formes linéaires assignées à m et à q dans notre équation, il est impossible que 3 divise x, ni y. Ou bien en exigeant que x soit premier à 3, on pourrait ne rien dire de la forme linéaire de q, qui dès lors est forcée. Mais tous ces détails importent peu. Passons aux exemples.

Soit d'abord $k = 0$, d'où le nombre premier $m = 11$: en retranchant 1, on a pour reste 10, et

$$10 = 2.5.1^2,$$

conformément à notre théorème, car le nombre premier 5 est compris

dans la formule $12g + 5$ où l'on peut faire $g = 0$. Il ne faut pas retrancher 9 de 11, puisque 9 est divisible par 3.

En prenant $k = 2$, on a aussi un nombre premier $m = 59$. Les carrés à retrancher sont 1, 25, 49, d'où ces trois restes 58, 34 et 10, qui tous les trois sont susceptibles d'une décomposition canonique, savoir

$$58 = 2.29.1^2, \quad 34 = 2.17.1^2, \quad 10 = 2.5.1^2.$$

Enfin le nombre premier 83, qui répond à $k = 3$, vérifie aussi notre théorème en donnant un nombre impair d'équations de la forme voulue :

$$83 = 1^2 + 2.41.1^2,$$
$$83 = 5^2 + 2.29.1^2,$$
$$83 = 7^2 + 2.17.1^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces vérifications numériques.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k + 19$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que je veux donner ici, au sujet des nombres premiers de la forme $24k + 19$, consiste en ce que, si m désigne un tel nombre, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 9x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier de la forme $12g + 5$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Il est curieux de rapprocher ce théorème de celui que nous avons donné dans l'article précédent pour les nombres premiers $24k + 11$; le carré x^2 employé pour ces derniers nombres, dans la formule représentative

$$x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

était essentiellement premier à 3 : il est remplacé par $9x^2$ dans la formule actuelle, pour les nombres premiers $24k + 19$.

Le plus petit nombre premier contenu dans la formule

$$24k + 19$$

est 19, et l'on a

$$19 = 9.1^2 + 2.5.1^2,$$

conformément à notre théorème.

Viennent ensuite 43 et 67, pour lesquels on trouve de même les équations canoniques

$$43 = 9.1^2 + 2.17.1^2$$

et

$$67 = 9.1^2 + 2.29.1^2.$$

Enfin le nombre premier 139, qui répond à $k = 5$, nous donne aussi une équation de la forme voulue

$$139 = 9.3^2 + 2.29.1^2,$$

en sorte que pour ce nombre, comme pour tous ceux qui précèdent et pour tous ceux qu'on pourrait ajouter, notre théorème a lieu.

MÉMOIRE

SUR

LE SPIRAL RÉGLANT DES CHRONOMÈTRES ET DES MONTRES [*];

PAR M. E. PHILLIPS.

Historique.

On sait que, dans les appareils portatifs qui servent à mesurer le temps, l'ensemble du ressort spiral et de son balancier remplit l'office de régulateur, tout comme le pendule dans les appareils fixes.

Huyghens, qui appliqua le premier le pendule aux horloges, est aussi l'inventeur du ressort spiral communément appelé *spiral réglant*, qu'il fit construire pour la première fois en 1674 par M. Thuret, habile horloger. Cette importante découverte lui fut contestée, il est vrai, à cette époque par le Dr Hook d'une part, puis par l'abbé Hautefeuille. Mais il ressort de toutes les longues discussions dont l'invention du spiral fut l'objet, que le Dr Hook peut avoir eu la première idée d'un ressort droit appliqué au balancier; que l'abbé Hautefeuille l'aurait ployé en forme d'hélice agissant dans le sens de son axe, mais que Huyghens seul perfectionna ces idées informes en donnant à ce ressort la forme spirale qui, ne gênant plus les grandes vibrations du balancier, a rendu ce régulateur excessivement précis. Enfin, l'on doit à

[*] Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences, a été renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. Mathieu, Lamé, et Delaunay rapporteur. Voici les conclusions du Rapport lu à l'Académie dans la séance du 28 mai 1860 :

« En résumé, le travail de M. Phillips présente une heureuse application des théories de la mécanique rationnelle à une importante question de la pratique, et permet de substituer des règles simples aux tâtonnements à l'aide desquels les constructeurs de chronomètres cherchent à obtenir l'isochronisme des oscillations du balancier. La Commission propose à l'Académie de donner son approbation à ce travail et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Pierre Leroy la découverte de la propriété de l'isochronisme du ressort spiral, en choisissant convenablement ses extrémités.

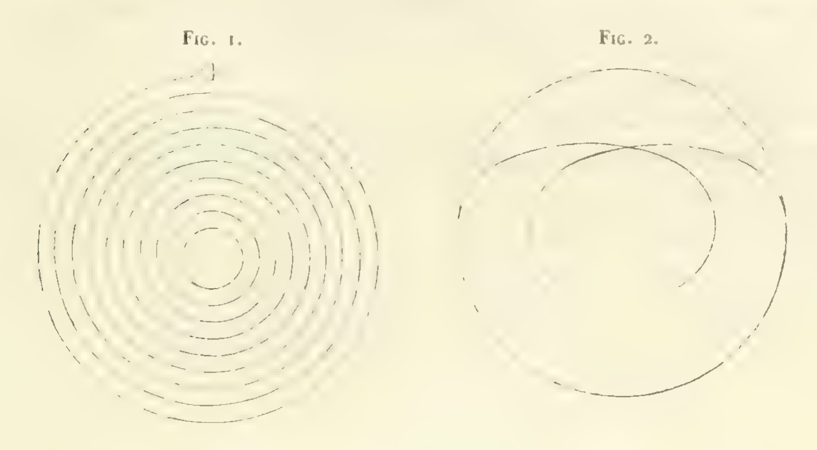
Préliminaires.

Quelque important que soit le régulateur dont il s'agit, sa théorie n'avait pas encore été établie, la forme essentiellement complexe de ce ressort introduisant dans l'application de la théorie de l'élasticité des équations différentielles tellement compliquées, qu'il serait absolument impossible de les intégrer. J'ai pourtant été assez heureux, par des combinaisons particulières, pour vaincre ces difficultés dans tout ce qui touche au problème, et c'est cette théorie qui fait l'objet de ce Mémoire. J'y considère la question comme un problème de mécanique, dont voici l'énoncé : « Etant donné un ressort spiral réuni à un balancier, trouver les lois de leur mouvement commun. » Dans la pratique on a évidemment à tenir compte d'influences secondaires, telles que celles des huiles, des frottements, etc. Plus loin, je reviendrai sur ces détails au point de vue des applications. Dès à présent, je me borne à dire que l'expérience est toujours venue confirmer la théorie qui fait l'objet de ce Mémoire et dont les conclusions sont toujours d'accord avec les idées reçues dans la pratique et avec tous les ouvrages qui traitent de l'horlogerie.

Qu'il s'agisse du spiral plat ou du spiral cylindrique, ses extrémités sont toujours fixées de la même manière et par des goupilles en coin, l'une à un piton fixe et l'autre soit à une virole, soit à un bras tournant avec le balancier et concentrique avec lui. Ce mode d'attache réalise la condition de l'encastrement, et l'on peut regarder l'extrémité fixe du spiral comme conservant une inclinaison invariable et son autre extrémité comme ayant une inclinaison fixe par rapport à celle du cercle de la virole à leur point d'intersection.

La différence de construction entre le spiral plat et le spiral cylindrique est la suivante : Le premier se compose, ainsi que l'indique la *fig.* 1, d'une courbe spirale plane, formée d'un certain nombre de spires, généralement de huit à douze, se rapprochant autant que possible de la forme circulaire et tracées autour du cercle de la virole.

Quant au spiral cylindrique (*fig.* 2), ses spires affectent rigoureu-



sement en projection horizontale la forme circulaire dont l'axe du balancier est le centre, et il se termine, en général, par deux courbes adoucies qui se rapprochent du centre à une distance ordinairement égale à environ la moitié du rayon. Ces spires venant se placer les unes au-dessous des autres, la forme rigoureuse du spiral est celle d'une hélice à pas extrêmement court, d'où le nom de *spiral cylindrique*.

Je prends comme point de départ, ainsi que je l'ai fait dans mon Mémoire sur les ressorts de chemins de fer, la théorie de la résistance des solides élastiques, d'après laquelle on admet l'existence d'un axe neutre central et le changement de courbure des fibres sans glissement relatif des unes par rapport aux autres. Je me hâte d'observer que, dans une Note placée à la fin du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, je démontre que, dans le problème actuel, ce principe est une conséquence rigoureuse de la théorie mathématique de l'élasticité.

Problème de l'équilibre du système du spiral et du balancier.

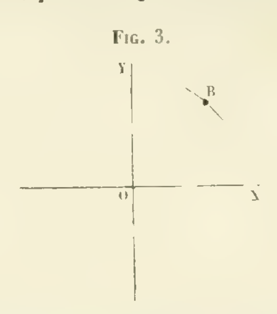
J'entre maintenant dans les détails de la question, et d'abord je commence par résoudre le problème suivant :

» Le spiral et le balancier étant dans leur position naturelle et en

équilibre, on suppose que l'on fasse décrire au balancier un angle de rotation α. On demande quel est le moment du couple qu'il faudrait appliquer au balancier pour le maintenir dans cette nouvelle position contre l'action du spiral. »

Pour résoudre ce problème, je rapporte le système à deux axes coordonnés rectangulaires, passant par le centre O du balancier (*fig.* 3)

Fig. 3.



et dont l'un OY passe aussi par celle des extrémités du spiral qui est fixe.

Si l'on considère, dans la nouvelle position d'équilibre, le balancier et le spiral comme formant un tout solide, ce système doit être en équilibre sous l'action du couple appliqué au balancier et dont le moment que j'appellerai G est précisément ce qu'il s'agit de déterminer. De plus, le centre du balancier étant fixe, rien n'empêche de le considérer comme libre, pourvu qu'on applique à ce point O une force égale et contraire à la pression qu'il peut exercer contre les parois du trou. Désignons par Y et X les composantes suivant OY et OX de la force ainsi appliquée au point O, point que je regarderai alors comme libre.

B étant la position occupée par un point quelconque du spiral dans le nouvel état d'équilibre, j'appelle x et y ses coordonnées; s, la longueur du spiral comprise entre ce point et l'extrémité fixe; L, la longueur totale du spiral; M, le moment d'élasticité de celui-ci; enfin ρ le rayon de courbure du spiral au point B dans la nouvelle position d'équilibre, et ρ_0 le rayon de courbure au même point B, dans l'état naturel du spiral quand le moment G est nul.

Dans la nouvelle position d'équilibre, celui-ci ne serait pas troublé si l'on solidifiait toute la partie du spiral comprise entre le point B et

l'extrémité engagée dans le balancier, et l'on a alors à considérer l'équilibre d'un corps solide formé de l'ensemble résultant de cette partie du spiral et du balancier, et soumis d'une part au couple G qui agit sur le balancier et aux forces X et Y, et d'autre part aux actions moléculaires exercées sur la section B par la partie non solidifiée du spiral. Si l'on transporte au point B les forces Y et X ainsi que le couple G, le couple résultant doit faire équilibre à celui qui provient des actions moléculaires exercées par la partie non solidifiée du spiral. Or si, pour fixer les idées, nous supposons que l'angle de rotation α soit dans un sens tel, que le rayon de courbure ait diminué au point B, le moment de ces actions moléculaires est égal à $M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)$ et nous aurons

$$(1)\qquad M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=G+Yx-Xy.$$

Cette équation convient à tous les points du spiral. On peut donc multiplier les deux membres par ds et intégrer dans toute l'étendue du spiral, ce qui donne

$$(2)\qquad M\left(\int\frac{ds}{\rho}-\int\frac{ds}{\rho_0}\right)=G\int ds+Y\int xds-X\int yds.$$

Or

$$G\int ds=GL.$$

Puis, si nous appelons x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité du spiral, il est évident que

$$\int xds=Lx_1 \quad \text{et} \quad \int yds=Ly_1;$$

par suite,

$$Y\int xds=YLx_1 \quad \text{et} \quad X\int yds=XLy_1.$$

Je passe maintenant au premier membre de l'équation (2). Or on voit que $\frac{ds}{\rho_0}$ est, pour la forme naturelle du spiral, l'angle formé par

deux normales consécutives de la courbe et, par conséquent, $\int \frac{ds}{\rho_0}$ n'est autre chose que l'angle compris entre les deux normales extrêmes. De même $\int \frac{ds}{\rho}$ est l'angle des deux normales extrêmes dans la nouvelle forme du spiral. Mais, quand celui-ci passe de la première position à la seconde, la normale relative à l'extrémité fixe reste invariable de direction, à cause de l'encastrement qui a lieu en ce point. D'un autre côté, de ce que l'autre extrémité du spiral s'engage dans la virole du balancier sous un angle, avec le cercle de la virole, qui reste constant aussi à cause de l'encastrement, il en résulte qu'en passant de la position naturelle du spiral à sa nouvelle position d'équilibre, la normale au spiral à son extrémité correspondante au balancier tourne d'un angle α. Il suit de ce qui précède qu'on a simplement

$$\int \frac{ds}{\rho} - \int \frac{ds}{\rho_0} = \alpha,$$

et l'équation (2) devient

$$M\alpha = GL + L(Yx_1 - Xy_1). \tag{3}$$

Calcul de la durée d'une oscillation du balancier.

Admettons, quant à présent, que le terme $L(Yx_1 - Xy_1)$ qui se trouve dans le second membre, soit nul ou négligeable. Je traiterai ce point un peu plus loin avec tous les détails qu'il comporte et j'établirai alors les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Regardons par conséquent ce fait comme admis pour le moment; et alors l'équation (3) se réduit à

$$M\alpha = GL \tag{4}$$

ou

$$G = \frac{M\alpha}{L}, \tag{5}$$

expression très-simple qui fait voir que le moment du couple qui tend à faire tourner le balancier est proportionnel à l'angle que celui-ci a

décrit à partir de sa position naturelle d'équilibre et qui donne de plus ce moment en fonction du moment d'élasticité et de la longueur du ressort spiral.

Dès lors il devient facile de trouver la durée des oscillations du balancier. En effet, en appelant A le moment d'inertie de celui-ci par rapport à son axe de rotation, on a à chaque instant, en faisant attention que le couple G agit comme couple résistant,

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -G,$$

ou, à cause de l'équation (5),

$$(6) \qquad A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M\alpha}{L}.$$

Je désigne par α_0 l'angle d'écartement du balancier qui répond à la limite de l'oscillation, alors que sa vitesse est nulle, et l'on a, en multipliant les deux membres de l'équation (6) par $2d\alpha$ et intégrant,

$$(7) \qquad A\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Puis, en intégrant de $\alpha = \alpha_0$ à $\alpha = -\alpha_0$, on a, pour le temps T d'une oscillation,

$$(8) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{AL}{M}},$$

relation fort simple qui donne la durée des vibrations. Elles se trouvent isochrones, quelle que soit leur amplitude.

L'expression précédente (8) est tout à fait analogue à celle qui donne le temps des petites oscillations du pendule. On voit que la longueur l du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps que le balancier serait exprimée par la formule

$$(9) \qquad l = L\frac{Ag}{M}.$$

La formule (8) est tout à fait d'accord avec l'expérience.

Conditions relatives à l'isochronisme.

Je reprends maintenant l'équation (3) dans laquelle j'ai négligé la partie $L(Yx_1 - Xy_1)$ et je vais examiner à quelles conditions l'on peut effectivement ne pas tenir compte de ce terme, d'où dépendent définitivement l'isochronisme des oscillations et l'exactitude de la formule (8).

En premier lieu, ce terme serait toujours nul si l'on avait constamment x_1 et y_1 égaux à zéro, c'est-à-dire si le centre de gravité du spiral restait toujours sur l'axe du balancier. De là résulte aussitôt la convenance de donner aux spires une forme sensiblement circulaire et concentrique à l'axe, de façon que le centre de gravité général soit sur cet axe et qu'il s'en écarte aussi peu que possible dans le mouvement.

Deuxièmement, le terme $L(Yx_1 - Xy_1)$ s'évanouirait encore si les composantes X et Y étaient nulles et par conséquent si la pression éprouvée par l'axe du balancier était toujours nulle, ou encore si cette pression passait constamment par le centre de gravité du spiral. En fait, dans la pratique cette pression est toujours excessivement faible dans les appareils bien faits, puisque alors, pourvu que l'huile n'ait pas manqué, on ne remarque aucune usure contre les parois du trou de l'axe, même après de nombreuses années de marche. Mais néanmoins je vais examiner, avec tous les développements que le sujet comporte, les conditions moyennant lesquelles on peut rigoureusement et mathématiquement atteindre ce but.

Je remarque à cet effet que, quand X et Y sont nuls ou tout à fait négligeables, l'équation (1) donne

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{G}{M},$$

ou, à cause de l'équation (5),

$$(10) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}.$$

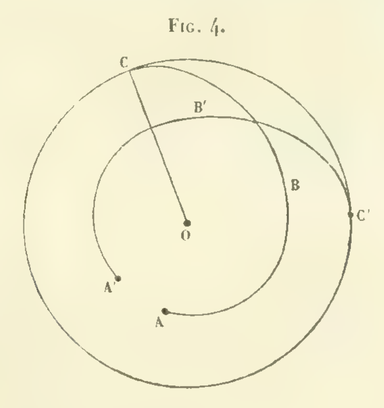
Il suit de là qu'alors le changement de courbure est uniforme. Ainsi si ρ_0 est constant, il en est de même de ρ; c'est-à-dire que si les

spires ont la forme de circonférences de cercle dans leur état naturel, elles affecteront encore, dans leurs déformations, celles de circonférences de cercle, mais d'un rayon différent; si, comme dans le spiral plat, elles ont dans leur état naturel des formes très-voisines de circonférences de cercle, il en sera de même pendant le mouvement, sauf que les rayons changeront. Quand, comme dans le spiral cylindrique, les spires ont sensiblement la forme de circonférences de même rayon venant se placer les unes au-dessus des autres, la formule (10) indique qu'alors, dans les déformations, les spires se transforment en circonférences d'un rayon unique différent du premier et qu'elles restent exactement les unes au-dessus des autres, ce qui est encore conforme à l'expérience.

Réciproquement à ce qui précède, si l'on avait continuellement pour tous les points du spiral $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$, c'est-à-dire la différence $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ constante, l'équation (1) montre qu'on aurait alors forcément $Y = 0$ et $X = 0$, et que, par conséquent, l'équation (5) aurait lieu avec ses conséquences. Je vais donc maintenant examiner dans quelles circonstances et sous quelles conditions on peut regarder la différence $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ comme constante dans toute l'étendue du spiral et pour toutes les valeurs de α.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du spiral cylindrique. Soit ABC (*fig.* 4) la courbe qui commence le spiral, A étant le bout fixe et C le

Fig. 4.



point de jonction et de tangence de cette courbe avec la première

spire. A l'autre extrémité du spiral, celui-ci se termine par une courbe symétrique et égale dont l'extrémité A', correspondante à A, est encastrée dans la virole du balancier. Or le problème est celui-ci : Chercher si l'on peut, pour toutes les valeurs entre lesquelles varie l'angle α, déformer le spiral d'après la loi $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$, de telle façon que les conditions relatives à ses extrémités soient toujours satisfaites, c'est-à-dire qu'au point A, ce point et sa tangente soient invariables et qu'en même temps, à l'extrémité opposée A', celle-ci aboutisse toujours au cercle de la virole et vienne le rencontrer sous un angle constant et donné. Ceci posé, je vais montrer la manière de résoudre la question par certaines formes appropriées données aux courbes extrêmes qui terminent de part et d'autre le spiral.

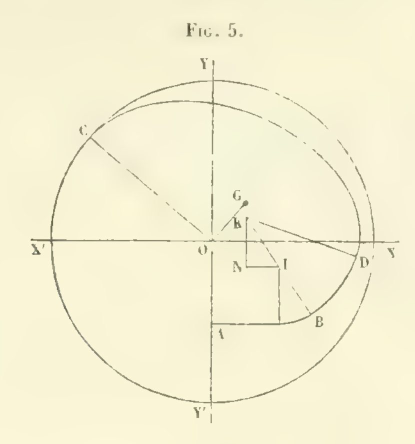
Détermination des courbes extrêmes.

Pour cela j'observe que, si le spiral dont il s'agit était construit de telle sorte que, en le déformant d'après la loi $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$, pour toutes les valeurs exigées de α, le centre des spires circulaires restât toujours dans une position invariable, la question serait résolue. En effet (voir *fig.* 4), les courbes extrêmes ABC, A'B'C' resteraient toujours égales et symétriques après la déformation. Or le point A est sur la circonférence de la virole dont le centre est en O ; mais puisque nous admettons que le centre des spires ne s'est pas déplacé, il arrivera que, par le seul fait de la déformation exprimée par $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$, le point A' supposé libre aboutira précisément sur la circonférence de la virole. Par une raison tout à fait semblable, la tangente au point A' à la courbe A'B'C' rencontrera le cercle de la virole sous le même angle que la tangente en A à ABC rencontre cette virole au point A, et comme ce dernier angle est constant et donné à cause de l'encastrement, il en sera de même de celui qui a lieu en A'. Or, en supposant maintenant le point A', au lieu d'être libre, fixé dans la virole et encastré dans celle-ci suivant l'angle donné, rien ne sera changé, et la loi de déformation sera exprimée par la formule $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$.

Je vais donc m'occuper maintenant de la détermination de la courbe extrême ABC ou de sa symétrique A′B′C′, d'après la condition que, pour toutes les valeurs les plus étendues de α, dans un sens ou dans l'autre, le centre des spires reste dans une position invariable, la déformation ayant lieu d'après la loi $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$. J'observe tout de suite que, dans les limites les plus extrêmes de la pratique, l'angle α varie entre $\frac{3}{4}$ de tour de chaque côté.

Soient OX et OY (*fig.* 5) deux axes coordonnés rectangulaires menés par le centre O primitif des spires qui est l'axe du balancier.

Fig. 5.



L'axe OY est conduit par le bout fixe A de la courbe ABC de maniere que ce point A soit sur la partie négative de cet axe.

Soit $BI = r$ le rayon de courbure qui a lieu au point B pendant la déformation et soit r_0 celui du même point avant la déformation. Au point D, infiniment voisin, le rayon de courbure est

$$KB = r + dr$$

et l'on a

$$dr = IK.$$

Formons le triangle rectangle IKN dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés. Il est clair que si ξ et η sont les coordonnées du centre de courbure I, on a

$$(11) \qquad IN = -d\xi$$

et

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{KN} = d\eta.$$

D'ailleurs la déformation a lieu suivant la loi

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{\mathrm{L}},$$

d'où l'on tire

$$\text{(14)} \qquad r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}} r_0}.$$

Maintenant j'appelle θ l'angle IKN formé par le rayon de courbure KB avec la partie négative de l'axe de y. En désignant par θ_0 l'angle correspondant au même point B avant la déformation, on trouve une relation très-simple entre θ et θ_0. En effet, en multipliant les deux membres de l'équation (13) par ds et intégrant depuis le point A jusqu'au point B, on a

$$\int \frac{ds}{r} = \int \frac{ds}{r_0} + \frac{\alpha s}{\mathrm{L}};$$

mais

$$\int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0} = \theta - \theta_0;$$

donc

$$\text{(15)} \qquad \theta = \theta_0 + \frac{\alpha s}{\mathrm{L}},$$

formule très-simple qui indique la manière dont varie l'inclinaison de la normale ou de la tangente pendant la déformation.

Dans le triangle IKN, on a

$$\mathrm{IN} \quad \text{ou} \quad -d\xi = \mathrm{IK} \sin \mathrm{IKN}, \quad \text{ou} \quad d\xi = -dr \sin\theta,$$

ou encore, à cause des équations (14) et (15), on a

$$\text{(16)} \qquad d\xi = -\sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{\mathrm{L}}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}} r_0}\right).$$

Le même triangle IKN donne

$$(17) \qquad d\eta = \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right).$$

Affectons d'un accent $'$ les quantités qui se rapportent spécialement à l'extrémité A de la courbe ABC et de deux accents $''$ celles qui se rapportent à l'autre extrémité C de la même courbe. Soit, de plus, δ la longueur absolue OA. Les coordonnées ξ' et η' du centre de courbure au point A pendant la déformation auront pour valeurs (en observant que la normale en A a une direction invariable)

$$\xi' = -r'\sin\theta'_0 = -\frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0}\sin\theta'_0,$$

$$\eta' = -\delta + r'\cos\theta'_0 = -\delta + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0}\cos\theta'_0.$$

En conséquence, on tire des formules (16) et (17) pour les coordonnées ξ'' et η'' du centre de courbure de la courbe ABC, au point C, pendant la déformation

$$(18) \qquad \xi'' = -\frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0}\sin\theta'_0 - \int \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right)$$

et

$$(19) \qquad \eta'' = -\delta + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0}\cos\theta'_0 + \int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right),$$

les intégrales étant prises dans toute l'étendue de la courbe ABC.

Comme le rayon de courbure de la courbe ABC au point C sera généralement différent du rayon des spires, le centre de celles-ci ne coïncidera pas avec le centre de courbure de la courbe au point C et on passera de celui-ci au centre des spires par un triangle rectangle de dimensions finies analogue au triangle infiniment petit IKN. Donc, en appelant ξ''' et η''' les coordonnées du centre des spires déformées, on

aura

$$\xi''' = \xi'' - (\rho - r'')\sin\theta'' \quad \text{et} \quad \eta''' = \eta'' + (\rho - r'')\cos\theta'',$$

ρ étant ce que devient, pendant la déformation, le rayon initial ρ_0 des spires. Donc, à cause des équations (14) et (15), on a, en appelant l la longueur développée de la courbe ABC,

$$\xi''' = \xi'' + \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

et

$$\eta''' = \eta'' - \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right).$$

En remplaçant dans ces formules ξ'' et η'' par leurs valeurs (18) et (19) on obtient pour les coordonnées ξ''' et η''' du centre des spires déformées :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \xi''' = {} & - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin\theta'_0 + \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ & - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) - \int \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \eta''' = {} & - \delta + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos\theta'_0 - \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ & + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces formules peuvent être très-simplifiées de la manière suivante. En intégrant par parties, on a

$$\int \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right) = \left\{ \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right\}''$$

$$- \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\, d.\sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right).$$

La parenthèse $\{\ \}_{'}^{''}$ indique qu'il faut prendre sa valeur au point C et en retrancher sa valeur au point A. Elle est donc égale à

$$\frac{r''_0}{1+\frac{\alpha}{L}r''_0}\sin\left(\theta''_0+\frac{\alpha l}{L}\right)-\frac{r'_0}{1+\frac{\alpha}{L}r'_0}\sin\theta'_0.$$

D'un autre côté

$$d.\sin\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)=\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)\times\left(1+\frac{\alpha}{L}\frac{ds}{d\theta_0}\right)d\theta_0$$
$$=\left(1+\frac{\alpha}{L}r_0\right)\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)d\theta_0,$$

puisque $\frac{ds}{d\theta_0}=r_0$.

Donc

$$\int\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\,d.\sin\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)=\int r_0\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)d\theta_0$$
$$=\int_0^l\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)ds$$

et par suite

$$\int\sin\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)d\left(\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\right)=\frac{r''_0}{1+\frac{\alpha}{L}r''_0}\sin\left(\theta''_0+\frac{\alpha l}{L}\right)$$
$$-\frac{r'_0}{1+\frac{\alpha}{L}r'_0}\sin\theta'_0-\int_0^l\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)ds.$$

Enfin, en substituant dans l'équation (20), celle-ci devient simplement

$$(22)\qquad \xi'''=-\frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0}\sin\left(\theta''_0+\frac{\alpha l}{L}\right)+\int_0^l\cos\left(\theta_0+\frac{\alpha s}{L}\right)ds.$$

On transforme de même l'équation (21).

Ainsi,

$$\int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right) = \left\{\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{E}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right\}_{\prime}^{\prime\prime}$$

$$- \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d.\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right).$$

Mais

$$\left\{\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right\}_{\prime}^{\prime\prime} = \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos\theta'_0,$$

et

$$- \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d.\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) = \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Donc

$$\int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\frac{r_0}{\left(1 + \frac{\alpha}{L} r_0\right)} = \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

$$- \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos\theta'_0 + \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

et, par suite, en substituant dans l'équation (21), on a simplement

$$(23) \qquad \eta''' = -\delta + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Pour que le centre des spires reste invariable, il faut que ξ''' et η''' soient nulles pour toutes les valeurs de α comprises entre les limites des oscillations. Il faut donc que les courbes extrêmes soient construites de telle façon que l'on ait [(à cause des équations (22) et (23)], pour toutes les valeurs de α dont il s'agit,

$$(24) \qquad \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = -\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

et

(25) $$\int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \delta - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right).$$

Il est facile de reconnaître que la forme circulaire ne convient pas pour les courbes extrêmes. En effet, pour le cercle, on a

$$\theta_0 = \frac{1}{r_0} s$$

r_0 étant la valeur du rayon. On a donc alors,

$$\int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

et

$$\int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} - \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \cos\left(\theta'_0 + \frac{\alpha l}{L}\right).$$

Or ces deux relations montrent que l'on vérifie la condition de l'équation (24) en faisant $r_0 = \rho_0$; mais qu'il serait impossible de satisfaire à la relation de l'équation (25) puisque δ est constant et que $\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}$ varie avec α. Ainsi dans beaucoup d'anciens chronomètres où les courbes extrêmes n'étaient autres qu'une portion des spires circulaires, cette disposition était vicieuse sous ce rapport et on y a effectivement renoncé.

Les raisonnements précédents supposent, il est vrai, que le centre de ce cercle soit sur YY' puisque j'ai fait $\theta_0 = \frac{1}{r_0} s$; mais on pourrait tout aussi bien le regarder comme placé d'une manière quelconque en faisant $\theta_0 = \frac{1}{r_0} s + \theta'_0$ et l'on arriverait encore à la même conclusion.

Je vais maintenant chercher la forme des courbes extrêmes qui satisfont aux conditions des équations (24) et (25). J'observe d'abord que les arcs $\frac{\alpha s}{L}$ et $\frac{\alpha l}{L}$ sont toujours assez petits pour qu'on puisse rem-

placer leur sinus par l'arc et leur cosinus par l'unité, car, dans les limites extrêmes de la pratique, $\frac{\alpha l}{L}$ est au plus égal à $\frac{1}{4}$, ce qui répond à un angle de 15 degrés, et même généralement plus petit. Par une raison semblable, on peut remplacer $\frac{1}{1+\frac{\alpha\rho_0}{L}}$ par $1-\frac{\alpha\rho_0}{L}$. De cette façon, les conditions (24) et (25) deviennent respectivement

$$(26)\quad \int_0^l \left(\cos\theta_0 - \frac{\alpha s}{L}\sin\theta_0\right)ds = \rho_0\left(1-\frac{\alpha\rho_0}{L}\right)\left(\sin\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\cos\theta''_0\right)$$

et

$$(27)\quad \int_0^l \left(\sin\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\cos\theta_0\right)ds = \delta - \rho_0\left(1-\frac{\alpha\rho_0}{L}\right)\left(\cos\theta''_0 - \frac{\alpha l}{L}\sin\theta''_0\right).$$

Pour satisfaire aux relations des équations (26) et (27), je négligerai les termes en α^2 qui sont infiniment petits du second ordre, et pour chacune de ces deux relations j'annulerai séparément la partie indépendante de α, puis celle qui est multipliée par la première puissance de α. On obtient ainsi les quatre conditions suivantes :

$$(28)\qquad \int_0^l \cos\theta_0\, ds = \rho_0 \sin\theta''_0,$$

$$(29)\qquad \int_0^l \sin\theta_0\, ds = \delta - \rho_0\cos\theta''_0,$$

$$(30)\qquad -\int_0^l s\sin\theta_0\, ds = -\rho_0^2\sin\theta''_0 + \rho_0 l\cos\theta''_0,$$

$$(31)\qquad \int_0^l s\cos\theta_0\, ds = \rho_0^2\cos\theta''_0 + \rho_0 l\sin\theta''_0.$$

Les deux conditions des équations (28) et (29) expriment que, dans la position naturelle des spires, leur centre doit se trouver sur l'axe du balancier, condition évidente à priori. En effet, en appelant x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe extrême, dans sa position naturelle, on a

$$ds\cos\theta_0 = dx \quad \text{et} \quad ds\sin\theta_0 = dy.$$

Par conséquent, en admettant que le centre O primitif des spires (*fig.* 5) soit le centre du balancier, on a

$$\int_0^l \cos\theta_0\, ds = \int dx = \rho_0 \sin\theta''_0$$

et

$$\int_0^l \sin\theta_0\, ds = \int dy = \delta - \rho_0 \cos\theta''_0,$$

c'est-à-dire que les conditions (28) et (29) sont satisfaites. Passons maintenant aux deux autres équations (30) et (31). Or, on a, en intégrant par parties,

$$\int s \sin\theta_0\, ds = \int s\,dy = sy - \int y\,ds$$

et

$$\int s \cos\theta_0\, ds = \int s\,dx = sx - \int x\,ds.$$

Prenons maintenant les intégrales définies et, en observant que si x_1 et y_1 sont les coordonnées du centre de gravité de la courbe ABC non déformée, on a

$$\int_0^l y\,ds = l y_1 \quad \text{et} \quad \int_0^l x\,ds = l x_1,$$

nous aurons

$$\int_0^l s \sin\theta_0\, ds = -\rho_0 l \cos\theta''_0 - l y_1$$

et

$$\int_0^l s \cos\theta_0\, ds = \rho_0 l \sin\theta''_0 - l x_1.$$

Enfin substituant dans les équations (30) et (31) et faisant les réductions, on obtient

$$l y_1 = -\rho_0^2 \sin\theta''_0$$

et

$$-l x_1 = \rho_0^2 \cos\theta''_0,$$

ou

$$(32)\qquad y_1 = -\frac{\rho_0^2}{l}\sin\theta''_0,$$

$$(33)\qquad x_1 = -\frac{\rho_0^2}{l}\cos\theta''_0,$$

conditions auxquelles doit satisfaire le centre de gravité de la courbe extrême. Celles-ci, quoique fort simples, peuvent être mises sous une forme plus palpable, plus facile à énoncer et qui permet de trouver très-facilement les courbes extrêmes qui les vérifient.

Imaginons, à cet effet, que la courbe ABC (*fig.* 5) soit telle qu'elle est naturellement avant toute déformation et que G soit son centre de gravité. En divisant l'équation (32) par l'équation (33) membre à membre, on a

$$\tang GOX = \tang \theta''_0.$$

Mais l'angle $\theta''_0 = 180° + COY$. Donc

$$\tang GOX = \tang COY$$

et

$$(34)\qquad GOX = COY.$$

Par conséquent, comme OX est perpendiculaire à OY, on voit déjà qu'il faut que OG soit perpendiculaire à OC.

En second lieu, si on élève au carré les deux membres des équations (32) et (33), puis qu'on ajoute, on obtient

$$(OG)^2 = \left(\frac{\rho_0^2}{l}\right)^2$$

ou

$$(35)\qquad OG = \frac{\rho_0^2}{l}.$$

On peut donc énoncer très-simplement de la manière suivante les deux conditions auxquelles doit satisfaire, en construction, la courbe extrême ABC :

1°. Son centre de gravité doit se trouver sur la perpendiculaire menée par le centre des spires au rayon extrême de cette courbe, là où elle se réunit aux spires.

2°. La distance de ce centre de gravité au centre des spires doit être égale à $\frac{\rho_0^2}{l}$, c'est-à-dire à une troisième proportionnelle à la longueur de la courbe et au rayon des spires.

Je donnerai plus loin de nombreux exemples de courbes extrêmes satisfaisant à cette condition, et au sujet desquelles l'expérience est venue, ainsi qu'on le verra, confirmer pleinement les déductions théoriques. Quant à présent, je me borne à faire remarquer que, d'après la loi indiquée, le point de départ A étant, ainsi que cela sa pratique ordinairement, à environ la moitié du rayon, le point C sera généralement plus facile à placer dans le troisième quadrant YOX' que dans toute autre partie de la circonférence, et l'observation a conduit généralement à faire parcourir en effet à la courbe ABC un angle de 180 à 270 degrés autour du point O.

Il est à remarquer que la forme des courbes extrêmes est complétement indépendante des dimensions transversales de la lame et même de la longueur totale du spiral. Il suffit que celle-ci soit assez grande afin qu'on puisse négliger les puissances de $\frac{\alpha s}{L}$ et de $\frac{\alpha \rho_0}{L}$ supérieures à la première. Enfin, il est très-essentiel d'observer encore que cette forme est complétement indépendante de la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

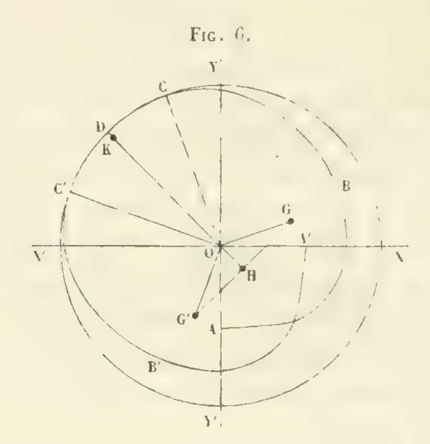
Conditions relatives au centre de gravité du spiral.

En remontant plus haut, j'ai fait voir qu'il était avantageux que le centre de gravité de tout le spiral fût, au moins en construction, placé sur l'axe du balancier. Or je vais établir que, non-seulement cette condition n'est pas incompatible avec celle d'où découle la forme des courbes extrêmes, mais qu'elle en est au contraire une conséquence directe, de sorte que, à cause de cette forme même, le terme que j'ai négligé dans le second membre de l'équation (3) devient, s'il est permis de s'exprimer ainsi, un infiniment petit du second ordre, d'une

part parce que les composantes Y et X sont infiniment petites et ensuite parce qu'il en est de même des cordonnées du centre de gravité général du spiral.

En effet, soit ABC (*fig.* 6) la courbe extrême dont le bout A est fixe et soit A'B'C' l'autre courbe extrême dont le bout A' est engagé dans

Fig. 6.



la virole du balancier. La figure suppose les choses dans l'état où elles sont avant toute déformation. Soit $COC' = 6$, 6 étant un angle quelconque.

On peut regarder le spiral comme formé de deux parties distinctes : la première, composée d'un nombre entier de spires circulaires commençant et finissant au point C et dont le centre de gravité est en O; la seconde, comprenant les deux courbes extrêmes et l'arc CDC'. Cherchons le centre de gravité de cette seconde partie.

Or, si G et G' sont les centres de gravité respectifs des deux courbes extrêmes, lesquelles sont, comme on sait, égales et symétriques, le centre de gravité de leur ensemble se trouve au point H, milieu de GG'.

De plus, comme les angles COG, C'OG' sont droits, la ligne OH, bissectrice de GOG', prolongée jusqu'en D, est aussi la bissectrice de COC' et passe, par conséquent, par le centre de gravité K de l'arc CDC'. En outre, l'angle OGH est égal à COK ou à $\frac{1}{2}6$.

Appelons maintenant m le moment du poids des deux courbes extrêmes par rapport au point O et m' celui de l'arc CDC' par rapport

au même point. On a

$$m = 2l \times \mathrm{OH} = 2l \times \mathrm{OG} \sin \frac{1}{2} \beta,$$

ou, à cause de l'équation (35),

$$(36) \qquad m = 2\rho_0^2 \sin \frac{1}{2} \beta.$$

D'un autre côté, en vertu de la loi qui donne le centre de gravité d'un arc de cercle, on a

$$m' = \rho_0 \times \text{corde}\, \mathrm{CC}',$$

ou

$$(37) \qquad m' = 2\rho_0^2 \sin \frac{1}{2} \beta,$$

et il résulte des équations (36) et (37) que

$$m = m',$$

et, par conséquent, que le centre de gravité de l'ensemble des deux courbes extrêmes et de l'arc CDC' est au point O, et, par suite, qu'il en est de même du centre de gravité de tout le spiral. Il est à remarquer que cette conséquence est indépendante de la grandeur de l'angle β ou de l'intervalle qui sépare les points C et C', ou, en d'autres termes, de la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

Ainsi, grâce à la construction des courbes extrêmes, le centre de gravité du spiral non déformé se trouve sur l'axe du balancier. Mais ce n'est pas tout et l'on peut trouver, ainsi qu'il suit, les conditions nécessaires pour que, pendant la déformation, ce centre de gravité s'en éloigne le moins possible.

Supposons, pour ne pas multiplier les figures, que la *fig.* 6 représente maintenant le spiral déformé et regardons encore celui-ci comme formé de deux parties : l'une, composée d'un nombre entier de spires circulaires, commençant et finissant au point C et dont le centre de gravité est toujours le centre O du balancier, puisque, d'après la forme des courbes extrêmes, le centre des spires reste invariable pendant la

déformation. L'autre portion du spiral est composée des deux courbes extrêmes et de l'arc de cercle CDC′. A cause que ces deux courbes extrêmes sont égales et symétriques, elles resteront encore égales et symétriques pendant la déformation. Par conséquent, G et G′ étant leurs centres de gravité, les angles COG, C′OG′ seront égaux quelle que soit d'ailleurs leur valeur; il en sera de même des deux lignes OG, OG′; le centre de gravité H de l'ensemble des deux courbes sera au milieu de GG′, et la ligne OH, qui est bissectrice de l'angle GOG′ étant prolongée jusqu'en D, sera aussi bissectrice de l'angle COC′ et passera par conséquent aussi par le centre de gravité K de l'arc CC′.

Ce premier point établi, j'appelle (x_1), (y_1), les coordonnées actuelles du centre de gravité G de la courbe ABC, lesquelles se réduisent à x_1 et y_1, lorsque la déformation cesse. En conservant toutes les notations employées précédemment, on a, pour un point quelconque de la courbe ABC,

$$\int s\cos\theta\,ds = \int s\,dx = sx - \int x\,ds$$

et

(38) $$\int_0^l s\cos\theta\,ds = l\rho\sin\theta'' - l(x_1).$$

D'un autre côté, en désignant par x_0 ce qu'était l'x de ce point avant la déformation, on a

$$\int s\cos\theta\,ds = \int s\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right)ds = \int s\left(\cos\theta_0 - \frac{\alpha s}{L}\sin\theta_0\right)ds$$
$$= \int s\,dx_0 - \frac{\alpha}{L}\int s^2\sin\theta_0\,ds = sx_0 - \int x_0\,ds - \frac{\alpha}{L}\int s^2\sin\theta_0\,ds.$$

Les développements de cette dernière relation résultent, d'une part de la formule (15) et ensuite de ce qu'on peut négliger les puissances de $\frac{\alpha s}{L}$ supérieures à la première. En passant aux limites, on a donc

(39) $$\int_0^l s\cos\theta\,ds = l\rho_0\sin\theta''_0 - lx_1 - \frac{\alpha}{L}\int_0^l s^2\sin\theta_0\,ds.$$

En égalant les seconds membres des équations (38) et (39), on en tire

$$(x_1) = x_1 + \rho \sin \theta'' - \rho_0 \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{Ll} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 \, ds.$$

En remplaçant ρ et θ'' respectivement par $\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}}$ et $\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}$ et négligeant les puissances de $\frac{\alpha\rho_0}{L}$ et de $\frac{\alpha l}{L}$ supérieures à la première; puis mettant à la place de x_1 sa valeur (33), la formule précédente devient

$$(40)\quad (x_1) = -\frac{\rho_0^l}{L} \cos \theta''_0 - \frac{\alpha}{L} \rho_0^2 \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0 l \cos \theta''_0 + \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 \, ds.$$

Je vais maintenant chercher d'une manière tout à fait semblable la valeur de (y_1). On a

$$\int s \sin \theta \, ds = \int s dy = sy - \int y ds$$

et

$$(41)\quad \int_0^l s \sin \theta \, ds = - l\rho \cos \theta'' - l(y_1).$$

D'un autre côté, en désignant par y_0 ce qu'était l'y du point avant la déformation, on a

$$\int s \sin \theta \, ds = \int s \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \int s \left(\sin \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \cos \theta_0\right) ds$$
$$= \int s dy_0 + \frac{\alpha}{L} \int s^2 \cos \theta_0 \, ds = sy_0 - \int y_0 \, ds + \frac{\alpha}{L} \int s^2 \cos \theta_0 \, ds.$$

Il vient donc, en passant aux limites,

$$(42)\quad \int_0^l s \sin \theta \, ds = - l\rho_0 \cos \theta''_0 - l y_1 + \frac{\alpha}{L} \int_0^l s^2 \cos \theta_0 \, ds.$$

En égalant les seconds membres des équations (41) et (42), on en

tire

$$(y_1) = y_1 - \rho\cos\theta'' + \rho_0\cos\theta''_0 - \frac{\alpha}{l\mathrm{L}}\int_0^l s^2\cos\theta_0\,ds.$$

En remplaçant ρ et θ'' respectivement par $\dfrac{\rho_0}{1+\dfrac{\alpha\rho_0}{\mathrm{L}}}$ et $\theta''_0 + \dfrac{\alpha l}{\mathrm{L}}$ et négligeant les puissances de $\dfrac{\alpha\rho_0}{\mathrm{L}}$ et de $\dfrac{\alpha l}{\mathrm{L}}$ supérieures à la première, puis mettant à la place de y_1 sa valeur (32), la formule précédente devient,

$$(43)\quad (y_1) = -\frac{\rho_0^2}{l}\sin\theta''_0 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0^2\cos\theta''_0 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0 l\sin\theta''_0 - \frac{\alpha}{l\mathrm{L}}\int_0^l s^2\cos\theta_0\,ds.$$

D'un autre côté, au point C, la valeur de θ avant la déformation est θ''_0 et, après la déformation, $\theta''_0 + \dfrac{\alpha l}{\mathrm{L}}\cdot$ Au point C' la valeur de θ avant la déformation est $\theta''_0 + \mathcal{E} + 2i\pi$, i étant un nombre entier, et après la déformation, $\theta''_0 + \mathcal{E} + 2i\pi + \dfrac{\alpha}{\mathrm{L}}(\mathrm{L} - l)$. Donc $\theta''_0 + \mathcal{E} + \alpha - \dfrac{\alpha l}{\mathrm{L}}$ est l'angle, plus petit que 360 degrés, formé par OC' avec OA, et en appelant $(\mathcal{E})$ la valeur de l'angle COC' pendant la déformation, on a

$$(44)\qquad (\mathcal{E}) = \mathcal{E} + \alpha - \frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}.$$

De même, la valeur de l'angle plus petit que 360 degrés, formé par OA avec la bissectrice OD pendant la déformation, est la moyenne de celles relatives à OC et à OC' ou égale à

$$\theta''_0 + \frac{1}{2}\mathcal{E} + \frac{1}{2}\alpha.$$

Par conséquent, comme l'angle HOA en diffère de 180 degrés, on a

$$(45)\qquad \mathrm{HOA} = \theta''_0 + \frac{1}{2}\mathcal{E} + \frac{1}{2}\alpha - 180^\circ.$$

Or OH est la projection de OG sur sa direction, ou, ce qui revient au même, la projection de (x_1) moins celle de (y_1) sur cette même di-

rection OH. On a donc

$$\mathrm{OH} = -(y_1)\cos \mathrm{HOA} + (x_1)\sin \mathrm{HOA},$$

ou, à cause des équations (40), (43) et (45),

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} = \cos&\left(\theta''_0 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\\ &\times\left(-\frac{\rho_0^2}{l}\sin\theta''_0 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0^2\cos\theta''_0 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0 l\sin\theta''_0 - \frac{\alpha}{l\mathrm{L}}\int_0^l s^2\cos\theta_0\, ds\right)\\ &-\sin\left(\theta''_0 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\\ &\times\left(-\frac{\rho_0^2}{l}\cos\theta''_0 - \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0^2\sin\theta''_0 + \frac{\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0 l\cos\theta''_0 + \frac{\alpha}{l\mathrm{L}}\int_0^l s^2\sin\theta_0\, ds\right).\end{aligned}$$

Puis, en nommant (m) le moment du poids de l'ensemble des deux courbes extrêmes par rapport au point O, on a

$$(m) = 2l \times \mathrm{OH},$$

ou, à cause de la valeur précédente de OH et en faisant quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}(m) = 2\rho_0^2\sin&\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right) + \frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}\rho_0^2\cos\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\\ &-\frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}\rho_0 l\sin\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{2\alpha}{\mathrm{L}}\int_0^l s^2\cos\left(\theta''_0 - \theta_0 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)ds,\end{aligned}$$

ou encore

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}(m) = 2\rho_0^2\sin&\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right) + \frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}\rho_0^2\cos\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\\ &-\frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}\rho_0 l\sin\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\\ &-\frac{2\alpha}{\mathrm{L}}\cos\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}a\right)\int_0^l s^2\cos(\theta''_0 - \theta_0)\, ds\\ &+\frac{2\alpha}{\mathrm{L}}\sin\left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha\right)\int_0^l s^2\sin(\theta''_0 - \theta_0)\, ds.\end{aligned}\right.$$

Maintenant, en appelant (m') le moment du poids de l'arc de cercle CC' par rapport à O, on a

$$(m') = \rho \times \text{corde}\,\mathrm{CC}' = 2\rho^2 \sin\frac{1}{2}(6),$$

ou, en remplaçant ρ par $\dfrac{\rho_0}{1+\dfrac{\alpha\rho^0}{\mathrm{L}}} = 1 - \dfrac{\alpha\rho_0}{\mathrm{L}}$ et (6) par sa valeur (44),

$$(m') = 2\rho_0^2\left(1 - \frac{\alpha\rho_0}{\mathrm{L}}\right)^2 \sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha l}{\mathrm{L}}\right).$$

On a encore, en développant et négligeant, comme cela est permis, les termes qui contiennent les puissances de α supérieures à la première,

$$(47)\qquad (m') = 2\rho_0^2\sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}\rho_0^2\cos\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{4\alpha}{\mathrm{L}}\rho_0^3\sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Pour que le centre de gravité du spiral reste au point O pendant le mouvement, il faut que pour toutes les valeurs de α, (m) et (m') soient égaux. Je vais donc égaler les seconds membres des relations (46) et (47).

Or on voit tout de suite que le premier terme $2\rho_0^2\sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right)$ s'annule de part et d'autre et que le reste est divisible par α, ce qui devait être, puisqu'on sait que pour $\alpha = 0$ le centre de gravité du spiral est en O. Je divise donc de part et d'autre par $\frac{2\alpha l}{\mathrm{L}}$, et il vient,

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &2\rho_0^2\cos\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right) - \rho_0 l \sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right) \\ &\quad + \frac{2\rho_0^3}{l}\sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right) \\ &= \frac{1}{l}\cos\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right)\int_0^l s^2\cos(\theta''_0 - \theta_0)\,ds \\ &\quad - \frac{1}{l}\sin\left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}\alpha\right)\int_0^l s^2\sin(\theta''_0 - \theta_0)\,ds. \end{aligned}\right.$$

Or, il est à remarquer que, dans cette dernière relation, tous les termes contiennent comme facteur le sinus ou le cosinus de $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha$ et que l'angle α n'y entre que sous la forme de ce sinus ou de ce cosinus. Pour que la relation ci-dessus soit satisfaite, quel que soit α, il est donc nécessaire et suffisant que l'ensemble des termes multipliés par ce sinus et par ce cosinus soient nuls séparément, ce qui donne les deux conditions

$$(49)\qquad \int_0^l s^2 \cos(\vartheta''_0 - \vartheta_0)\, ds = 2\rho_0^2 l$$

et

$$(50)\qquad \int_0^l s^2 \sin(\vartheta''_0 - \vartheta_0)\, ds = \rho_0 l^2 - 2\rho_0^3.$$

Telles sont les deux conditions qui doivent être autant que possible satisfaites, afin que le centre de gravité du spiral ne s'éloigne pas du balancier. Elles dépendent de la forme des courbes extrêmes, mais nullement de leur écartement mutuel, car on voit qu'elles sont indépendantes de l'angle β.

Faute de pouvoir trouver à priori des courbes qui satisfassent aux deux conditions précédentes, on peut néanmoins indiquer la manière de vérifier assez simplement jusqu'à quel point les courbes extrêmes, déterminées d'après les règles précédemment exposées, satisfont aux relations (49) et (50).

En effet, si l'on rapporte la courbe ABC (*fig.* 5) à OC comme axe des y et à la perpendiculaire OG comme axe des x et que l'on appelle y' et x' les nouvelles coordonnées, on voit que les conditions (49) et (50) reviennent à

$$(51)\qquad \int s^2\, dx' = -2\rho_0^2 l,$$

$$(52)\qquad \int s^2\, dy' = \rho_0 l^2 - 2\rho_0^3,$$

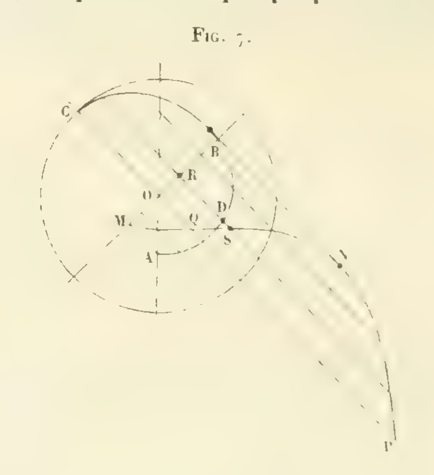
les intégrales étant prises depuis le point A jusqu'à C.

Or un premier moyen consiste à partager la courbe ABC en éléments suffisamment petits et à obtenir les valeurs approchées des intégrales en

formant pour chaque point de division les produits $s^2 dx'$ et $s^2 dy'$. Mais il y a un autre moyen qui parle plus aux yeux et qui évite de longs calculs.

Supposons (*fig.* 7) que l'on projette tous les points de la courbe ABC sur l'axe des x, OB, et que sur chaque perpendiculaire DR on porte, à

Fig. 7.



partir de son pied R, une longueur RS égale à la longueur AD de la portion de la courbe ABC comprise entre l'origine A et le point D correspondant. On obtiendra ainsi une courbe MQSNP dont les ordonnées ne sont autre chose que les quantités désignées par s. Or, si l'on multiplie les deux membres de l'équation (51) par $-\pi$, on a

$$-\pi\int s^2 dx' = 2\pi\rho_0^2 l,$$

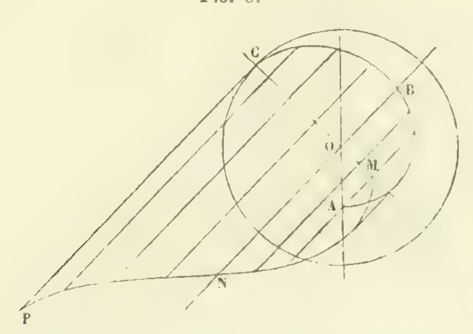
et il résulte de la *fig.* 7 que cette condition revient à dire que le volume du solide engendré par la révolution de QNP autour de MOB moins celui engendré par la révolution de MOQ autour du même axe, doit être égal à $2\pi\rho_0^2 l$ et, à cause du théorème de Guldin, on peut convertir cette condition en cette autre :

« La surface QNP multipliée par le rapport qui existe entre l'ordonnée de son centre de gravité et la longueur de la courbe ABC, diminuée de la surface MOQ multipliée par le rapport de l'ordonnée de son centre de gravité à la longueur de ABC, doit être égale au carré du rayon des spires. »

La condition (52) peut être transformée d'une manière analogue.

Ainsi supposons (*fig.* 8) que l'on fasse pour l'axe des y ou OC ce


Fig. 8.



qui vient d'être effectué relativement à OB. On obtiendra une courbe MNP dont chaque point aura pour abscisse le s du point correspondant de la courbe ABC, et la condition exprimée par l'équation (52) reviendra à dire que le volume du solide engendré par la révolution de la surface MNPC tournant autour de MOC doit être égal à

$$\pi\rho_0 l^2 - 2\pi\rho_0^3,$$

et cette condition elle-même, à cause du théorème de Guldin, peut être convertie en cette autre :

« La surface MNPC multipliée par le rapport qui existe entre l'abscisse de son centre de gravité et le rayon des spires doit être égale à la moitié du carré dont le côté aurait pour longueur ABC, moins le carré du rayon des spires. »

En résumé, on voit que les courbes extrêmes indiquées par la théorie concourent à l'isochronisme, en satisfaisant aux deux conditions d'annuler toute pression contre l'axe du balancier et de placer le centre de gravité du spiral entier sur l'axe du balancier, et cela quelle que soit la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

Mais ce n'est pas tout. Elles ont encore la propriété de faire disparaître certaines perturbations nuisibles pour l'isochronisme. Ainsi elles réalisent le spiral libre, comme on dit dans la pratique, c'est-à-dire celui dans lequel l'axe du balancier, n'éprouvant aucune pression, est

soustrait autant que possible au frottement et aux variations de celui-ci qui résultent de l'épaississement des huiles. De plus, le spiral s'ouvrant et se fermant toujours bien concentriquement à l'axe, on évite autant que possible la perturbation introduite par l'inertie du spiral.

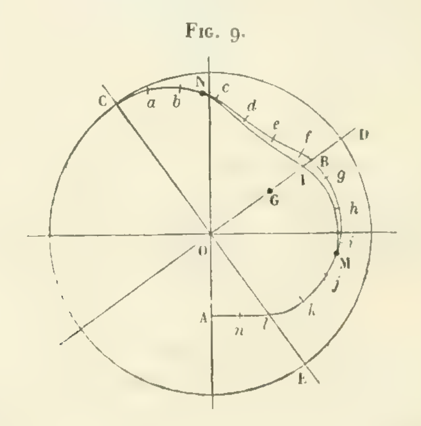
Enfin une remarque importante trouve ici sa place. Certaines influences très-minimes, comme l'action des huiles, de l'échappement, de la résistance de l'air, etc., n'ont pu entrer dans cette théorie, et cela devait être, car on ne doit demander au calcul que ce qu'il peut donner. Mais on a vu que toutes les propriétés inhérentes à ces courbes extrêmes subsistent, quelle que soit leur position relative l'une au-dessus de l'autre. Il en résulte que, pour obtenir le dernier degré d'isochronisme pratique, on peut toujours joindre à leur emploi celui du moyen dû en principe à Pierre Leroy et qui consiste à chercher la longueur la plus favorable pour le spiral, puisqu'on peut disposer de l'angle que font entre eux les rayons où naissent les courbes extrêmes.

Méthode pour trouver graphiquement les courbes extrêmes.

Je vais maintenant expliquer la manière de trouver graphiquement, par un procédé simple, les courbes extrêmes qui conviennent à chaque cas.

Je suppose qu'on se donne la position du point A fixée par la quantité δ et l'angle θ''_0 qui détermine le point C (*fig.* 9).

Fig. 9.



On mène le rayon extrême OC et le rayon perpendiculaire OD sur

lequel doit se trouver le centre de gravité G de la courbe cherchée ABC.

Le dessin étant supposé à une échelle suffisamment grande, on cherchera d'abord à obtenir une courbe dont le centre de gravité soit sur OD. A cet effet on tracera une première courbe ABC, de sentiment, mais tangente en C aux spires. Puis, pour vérifier, on la partage en éléments suffisamment petits et égaux, 10 ou 12 par exemple, Ca, ab, bc, cd, etc; le dernier An seul sera généralement plus petit que les autres. On marquera tout de suite le centre de gravité de chaque élément en le considérant comme une petite ligne droite ou, suivant les cas, comme un petit arc de cercle. Pour chaque centre de gravité on mesurera sa distance à OD et on modifiera celle relative à An en la multipliant par le rapport de An à la longueur commune de tous les autres arcs. Avec cette modification, il devra arriver que la somme des distances des centres de gravité qui sont d'un côté de OD soit égale à la somme des distances de ceux qui sont situés de l'autre côté. Si cette condition n'est pas remplie, il sera très facile de modifier l'une des deux portions de la courbe de manière à y arriver.

Ce premier point établi, il reste encore à satisfaire à la seconde condition, à savoir que la distance OG du centre de gravité au centre soit égale à $\frac{\rho_0^2}{l}$, ρ_0 étant le rayon des spires et l la longueur de la courbe ABC. Or, pour obtenir l'écartement du centre de gravité de la courbe du point O, on mesurera celui des centres de gravité de tous les petits arcs, Ca, ab, bc, etc., de la ligne COE; on modifiera celle de ces distances qui répond à An en la multipliant par le rapport de An à la longueur des autres petits arcs. On prendra la somme algébrique de toutes ces distances, en regardant comme positives celles qui sont à droite de CE, c'est-à-dire du même côté que B, et comme négatives celles qui sont de l'autre côté. On divisera cette somme par le nombre des éléments Ca, ab, etc. Ce quotient, qui donnera la distance OG, devra être égal à $\frac{\rho_0^2}{l}$. Si cette égalité n'a pas lieu, il sera facile de modifier la courbe de manière à y arriver, tout en continuant de satisfaire à la première condition.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que la distance OG ainsi obtenue soit supérieure à $\frac{\rho_0^2}{l}$. On prendra de part et d'autre du point B deux arcs BM et BN tels, que le centre de gravité de leur ensemble soit sur OD, ce qu'il sera aisé de vérifier, et on remplacera l'arc MBN par un arc intérieur MIN dont le centre de gravité soit aussi sur OD et dont le moment par rapport à CE sera évidemment moindre. Il est évident qu'on arrivera ainsi très-vite au résultat cherché, et c'est en effet ainsi que j'ai déterminé tous mes types de courbes extrêmes.

On pourra ensuite réduire la courbe extrême à sa vraie grandeur par une courbe semblable tracée autour du centre.

On peut, ainsi que je l'ai fait voir, vérifier directement d'après les tracés que les courbes extrêmes ainsi déterminées satisfont en réalité à la condition que le centre des spires ne se déplace que d'une quantité tout à fait insensible, dans les limites extrêmes des oscillations du balancier. Afin de procéder à cette vérification, on tracera la courbe par arcs de cercle successifs, C*a*, *ab*, *bc*, etc., en cherchant, pour chacun d'eux, le centre et le rayon correspondant. Cette décomposition de la courbe en arcs de cercle successifs est même toujours utile pour la tracer graphiquement d'une manière plus régulière. Puis on calculera les rayons de la courbe modifiée d'après la formule

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L} \quad \text{ou} \quad r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}.$$

A l'aide de ces nouveaux rayons, on tracera la courbe modifiée par arcs successifs à partir du point A où la tangente n'a pas changé de direction; puis, en arrivant au point C, on portera sur la normale une longueur égale au rayon modifié des spires, et ce centre devra se trouver toujours sensiblement au point O. C'est en effet ce que j'ai toujours obtenu.

Au sujet de cette vérification, il y a une remarque à faire. D'après la manière dont elle est effectuée, la courbe se trouve décomposée en une série d'arcs de cercle plus ou moins petits, dont les rayons varient brusquement de l'un à l'autre, c'est-à-dire d'une manière discontinue. Or, les calculs qui avaient conduit à la loi des courbes extrêmes expri-

mée par les formules (32) et (33) supposaient les rayons de courbure variant d'une manière continue. Dans l'espèce, cela n'a pas d'importance puisqu'il s'agit seulement d'une vérification à postériori; mais d'ailleurs il est facile de reconnaître que la courbe décomposée en arcs de cercle de rayons variant brusquement de l'un à l'autre rentre dans les conditions qui ont servi à établir les formules (32) et (33). En effet, au point de rencontre et de tangence de deux arcs différents, les deux centres de courbure sont placés sur la normale commune. Or rien n'empêche d'échelonner sur cette normale une infinité de centres de courbure intermédiaires infiniment rapprochés les uns des autres et de substituer par la pensée au point de rencontre de deux arcs une infinité d'arcs infiniment petits décrits de chacun de ces centres de courbure intermédiaires. En opérant ainsi pour chaque rencontre de deux arcs, on aura, pour tout l'ensemble de la courbe une série de rayons de courbure et de centres de courbure variant tous d'une manière continue, et il est facile de reconnaître en revoyant tous les calculs et tous les raisonnements qui ont conduit aux formules (32) et (33) que rien n'y est contrarié par la nouvelle hypothèse dont je viens de parler. On voit, en effet, ces vérifications aboutir au résultat prévu de l'invariabilité du centre des spires.

De l'isochronisme du spiral plat.

Quant au spiral plat, qui est employé dans les montres, on peut appliquer, jusqu'à un certain point, les considérations qui viennent d'être développées tout au long pour le spiral cylindrique des chronomètres.

Ici il faut encore chercher si, pour toutes les valeurs par lesquelles passe l'angle α, il est possible de déformer le spiral d'après la loi

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L}$$

de manière que l'un des bouts restant fixe avec une inclinaison constante, l'autre extrémité, qui est celle la plus voisine du centre, satisfasse toujours comme position et inclinaison aux conditions de son encastrement dans la virole du balancier. Or, dans la pratique, cet

encastrement a toujours lieu de manière que le spiral vienne s'appliquer tangentiellement dans la virole. Le problème est alors celui-ci : « Chercher si, en déformant le spiral d'après la loi qui vient d'être énoncée et prenant sur le rayon extrême une longueur constante égale au rayon de la virole, on peut tomber sur un point ou centre occupant une position invariable quel que soit l'angle α. »

Pour cela, il suffit de répéter les calculs qui ont été faits pour la courbe ABC depuis la formule (11) jusqu'aux formules (22) et (23). Ici, désignant par ξ''' et η''' les coordonnées du dernier centre qui doit correspondre à celui de la virole, on aura ξ''' et η''' par les mêmes formules (22) et (23) avec la seule modification suivante. Le dernier rayon à porter sur la normale correspondante étant celui de la virole, ρ_1 par exemple, qui est d'une longueur fixe, le facteur $\frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{l}\rho_0}$ qui entre dans les formules (22) et (23) doit être remplacé par ρ_1; de plus, l devient égal à L. On a alors, dans le cas actuel,

$$(53)\qquad \xi''' = -\rho_1 \sin(\theta''_0 + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(54)\qquad \eta''' = -\delta + \rho_1 \cos(\theta''_0 + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Cherchons maintenant les conditions pour que les coordonnées ξ''' et η''' soient nulles; soient

$$(55)\qquad \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \rho_1 \sin(\theta''_0 + \alpha)$$

et

$$(56)\qquad \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \delta - \rho_1 \cos(\theta''_0 + \alpha).$$

Ici nous sommes obligé d'imposer une condition, à savoir que l'angle α soit suffisamment petit pour qu'on puisse remplacer son sinus par l'arc et son cosinus par l'unité. Dès lors on voit sur-le-champ que les rela-

tions (55) et (56) peuvent être mises sous la forme :

$$\int_0^L \cos\theta_0\, ds - \frac{\alpha}{L}\int_0^L s\sin\theta_0\, ds = \rho_1 \sin\theta''_0 + \alpha\rho_1\cos\theta''_0$$

et

$$\int_0^L \sin\theta_0\, ds + \frac{\alpha}{L}\int_0^L s\cos\theta_0\, ds = \delta - \rho_1\cos\theta''_0 + \alpha\rho_1\sin\theta''_0.$$

En égalant séparément dans ces deux relations les parties indépendantes de α et celles multipliées par α, qui se trouvent dans les deux membres de chacune d'elles, on arrive au quatre conditions suivantes :

$$(57)\qquad \int_0^L \cos\theta_0\, ds = \rho_1\sin\theta''_0,$$

$$(58)\qquad \int_0^L \sin\theta_0\, ds = \delta - \rho_1\cos\theta''_0,$$

$$(59)\qquad -\int_0^L s\sin\theta_0\, ds = \rho_1 L\cos\theta''_0,$$

$$(60)\qquad \int_0^L s\cos\theta_0\, ds = \rho_1 L\sin\theta''_0.$$

Il est facile de reconnaître que les deux premières conditions (57) et (58) sont satisfaites par la construction même du spiral, ainsi que les formules (28) et (29) l'étaient pour le spiral cylindrique; il reste donc maintenant les deux conditions (59) et (60). Or, en intégrant par parties, on a

$$\int s\sin\theta_0\, ds = \int s\,dy = sy - \int y\,ds$$

et

$$\int s\cos\theta_0\, ds = \int s\,dx = sx - \int x\,ds.$$

Si donc on passe aux intégrales définies et qu'on appelle x_1 et y_1 les

coordonnées du centre de gravité du spiral, on a

$$-\int_0^L s\sin\theta_0 ds = \rho_1 L\cos\theta''_0 + Ly_1$$

et

$$\int_0^L s\cos\theta_0 ds = \rho_1 L\sin\theta''_0 - Lx_1.$$

Enfin substituant dans les formules (59) et (60), on en déduit simplement

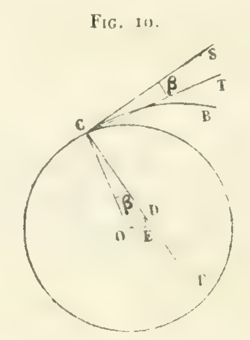
(61) $$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité du spiral doit être sur l'axe du balancier.

J'ai supposé que, ainsi que cela a lieu ordinairement dans la pratique, le spiral vient se raccorder tangentiellement à la virole du balancier. Il est facile de démontrer que, lors même que cette rencontre aurait lieu sous un angle β quelconque, on arriverait toujours à la même condition $x_1 = 0$ et $y_1 = 0$.

En effet, soient CB (*fig.* 10) la fin du spiral et C son extrémité. Soit

Fig. 10.



SCT $= \beta$ l'angle des deux tangentes; ce sera aussi celui OCD des deux normales et l'on aura

(62) $$\{CD = \rho_1\cos\beta \quad \text{et} \quad OD = \rho_1\sin\beta\},$$

la ligne OD étant perpendiculaire à CD.

En appelant ξ_1 et η_1 les coordonnées du point D, elles se déduiraient des valeurs (53) et (54), en y changeant ρ_1 en $\rho_1 \cos 6$, et on aurait

$$(63) \qquad \xi_1 = -\rho_1 \cos 6 \sin(\theta''_0 + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(64) \qquad \eta_1 = -\delta + \rho_1 \cos 6 \cos(\theta''_0 + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Désignons maintenant par ξ''' et η''' les coordonnées cherchées du point O, et formons le triangle rectangle ODE dont le côté OE est parallèle à l'axe des x et celui DE à l'axe des y. En se reportant à la figure 5, il est facile de reconnaître que l'angle DOE, égal à EDF, est égal à $\theta''_0 - 180°$, diminué d'un certain nombre entier de fois 360°. Donc

$$\text{OE} = -\,\text{OD} \cos(\theta''_0 + \alpha)$$

et

$$\text{DE} = -\,\text{OD} \sin(\theta''_0 + \alpha),$$

ou, à cause de la formule (62),

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{OE} = -\rho_1 \sin 6 \cos(\theta''_0 + \alpha) \\ \quad \text{et} \\ \text{DE} = -\rho_1 \sin 6 \sin(\theta''_0 + \alpha). \end{array} \right.$$

Mais on a évidemment

$$\xi''' = \xi_1 - \text{OE}$$

et

$$\eta''' = \eta_1 - \text{DE}.$$

Il vient donc, en ayant égard aux formules (63), (64) et (65),

$$(66) \qquad \xi''' = -\rho_1 \sin(\theta''_0 - 6 + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(67) \qquad \eta''' = -\delta + \rho_1 \cos(\theta''_0 - 6 + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

En procédant comme cela a été fait précédemment, on voit que, pour que ξ''' et η''' soient nulles dans les petites oscillations, il faut que les quatre conditions suivantes soient satisfaites, savoir :

$$\int_0^{\mathrm{L}} \cos\theta_0\, ds = \rho_1 \sin(\theta''_0 - \varepsilon),$$

$$\int_0^{\mathrm{L}} \sin\theta_0\, ds = \delta - \rho_1 \cos(\theta''_0 - \varepsilon),$$

$$-\int_0^{\mathrm{L}} s \sin\theta_0\, ds = \rho_1 \mathrm{L} \cos(\theta''_0 - \varepsilon),$$

$$\int_0^{\mathrm{L}} s \cos\theta_0\, ds = \rho_1 \mathrm{L} \sin(\theta''_0 - \varepsilon).$$

Les deux premières conditions sont encore remplies par la construction même du spiral. Quant aux deux dernières, en les développant exactement comme dans le cas précédent, on est conduit à

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$$

On voit par là que, pour le spiral plat ordinaire, l'isochronisme ne peut avoir lieu que pour de petites oscillations. Mais il n'en est plus de même du spiral dit *spiral ramené* parce qu'il est terminé par une courbe ramenée vers le centre que l'on peut rendre isochrone pour de grandes amplitudes dans les vibrations du balancier. En prenant pour courbe extrême une des courbes théoriques dont il a été question précédemment, le mouvement du spiral s'effectue concentriquement à l'axe; la pression contre celui-ci est sensiblement annulée et l'on obtient de bonnes conditions d'isochronisme.

Allongements et raccourcissements proportionnels.

On peut se demander quels sont les allongements et les raccourcissements proportionnels que subit le spiral pendant les déformations. Or on voit tout de suite que, en appelant i ce raccourcissement ou cet allongement, on a

$$(68) \qquad i = \frac{e\alpha}{2\mathrm{L}}.$$

car il est égal à

$$\frac{e}{2}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Il est donc constant dans toute l'étendue du spiral, proportionnel à l'épaisseur du fil et à l'angle de rotation, et en raison inverse de la longueur de ce fil.

On obtient ici, sur le travail de déformation du spiral, des résultats tout à fait analogues à ceux auxquels j'étais parvenu dans mon Mémoire sur les ressorts en acier employés dans les chemins de fer.

En effet, soit a la largeur du fil du spiral. Considérons dans sa section transversale un élément infiniment mince, ayant pour hauteur a et sa distance à l'axe neutre égale à v; l'épaisseur de cet élément sera dv. Soient ρ le rayon de courbure actuel correspondant à cette section et r le rayon correspondant de fabrication. La force attractive ou répulsive, agissant sur les faces latérales de cet élément, sera

$$\mathrm{E}av\,dv\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right).$$

L'allongement proportionnel est $v\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)$, la longueur primitive était ds. Donc, en passant du rayon ρ à $\rho+d\rho$, sa longueur s'accroît de $vd\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)ds$ et le travail élémentaire développé par ce petit prisme est

$$\mathrm{E}av^2dv\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)d\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)ds.$$

Si donc ρ_0 et ρ_1 sont les rayons de courbure extrêmes dans les limites de la déformation, le travail total développé par ce solide élémentaire sera

$$\frac{\mathrm{E}av^2dv}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{r}\right)^2\right]ds.$$

Si l'on considère la section entière du fil ayant la longueur ds, le travail aura pour expression $\left(\text{en faisant attention que } \int \mathrm{E}av^2dv=\mathrm{M}\right)$

$$\frac{\mathrm{M}}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2\right]ds.$$

Mais on sait qu'en général

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\alpha}{L},$$

α étant l'angle de rotation correspondant. Donc ce travail est égal à

$$\frac{M}{2L^2}(\alpha_1^2 - \alpha_0^2)\,ds,$$

α_1 et α_0, étant les angles de rotation du balancier répondant à ρ_1 et ρ_0

Pour avoir le travail total absorbé par le spiral, il faut intégrer par rapport à ds, depuis o jusqu'à L. Donc enfin ce travail total est

$$(69) \qquad \frac{M}{2L}(\alpha_1^2 - \alpha_0^2).$$

Appelons i_1 et i_0 les allongements proportionnels répondant à α_1 et à α_0. D'après l'équation (68) on peut substituer dans l'équation (69) à α_1 et α_0 respectivement $\frac{2Li_1}{e}$ et $\frac{2Li_0}{e}$, d'où résulte cette autre expression du travail :

$$\frac{2ML}{e^2}(i_1^2 - i_0^2).$$

Remplaçons-y M par $\frac{Eac^3}{12}$ (en supposant la section rectangulaire) et nous aurons pour le travail

$$\frac{EacL}{6}(i_1^2 - i_0^2)$$

ou

$$\frac{EV}{6}(i_1^2 - i_0^2),$$

en appelant V le volume du spiral. Ainsi, d'une manière générale, le travail exigé pour la déformation de celui-ci dépend uniquement de son volume ou de son poids et des allongements qu'on lui fait subir, mais nullement de ses dimensions particulières.

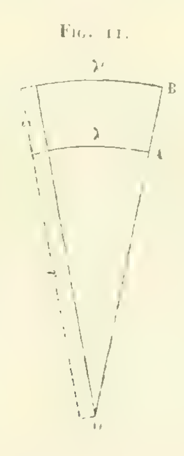
De l'effet de la température sur le spiral.

On sait que les variations de la température influent sur la marche d'un chronomètre ou d'une montre. On a déjà combattu cette cause d'irrégularité, quant au balancier, par l'emploi du balancier compensateur. Je vais ici m'occuper de l'influence exercée sur le spiral lui-même.

Je suppose un spiral construit suivant les lois exposées dans tout ce qui précède. Imaginons que ce spiral, fixé par une de ses extrémités comme d'habitude, soit libre de l'autre et que sa température varie. Je vais d'abord chercher ce que sera sa nouvelle forme, en admettant, comme on le fait généralement, que, dans un corps homogène libre soumis à un réchauffement ou à un refroidissement, la dilatation linéaire, positive ou négative, soit la même dans toutes les directions.

Il est facile de démontrer que les déformations seront telles, que tous les rayons de courbure varieront dans le rapport même de la dilatation linéaire que j'appellerai ε, rapportée à l'unité de longueur. En effet, soient (*fig.* 11) λ_0 et λ'_0 les longueurs de deux éléments cor-

Fig. 11.



respondant, dans l'état primitif, à un même centre de courbure O, et dont les rayons de courbures sont

$$OA = r_0 \quad \text{et} \quad OB = r_0 + z_0.$$

On a

$$r_0 : \lambda_0 :: z_0 : \lambda'_0 - \lambda_0$$

ou

$$r_0 = \frac{\lambda_0 z_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}.$$

Après la dilatation, r_0, λ_0, λ'_0, z_0 sont devenus r, λ, λ' et z et l'on a

$$r = \frac{\lambda z}{\lambda' - \lambda}.$$

Mais

$$\lambda = (1 + \varepsilon)\lambda_0,$$

$$\lambda' = (1 + \varepsilon)\lambda'_0,$$

$$z = (1 + \varepsilon)z_0.$$

Donc

$$r = (1 + \varepsilon)\frac{\lambda_0 z_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}$$

ou

$$r = (1 + \varepsilon)r_0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce premier point établi, je vais chercher quelle doit être la forme des courbes extrêmes pour que, dans la déformation produite par la dilatation, l'extrémité que j'ai supposée libre du spiral vienne d'elle-même aboutir précisément sur le cercle de la virole et rencontre celui-ci sous l'angle primitif donné d'avance, afin que les changements de température ne produisent aucun effort contre les points d'attache. En recommençant le raisonnement qui a été fait plus haut à propos de la déformation résultant des oscillations du balancier, on reconnaît exactement de même qu'il faut et qu'il suffit que la courbe extrême soit telle, que, dans la déformation produite par la dilatation, le centre des spires reste sur l'axe du balancier. Le calcul, dans les deux cas, offre une grande analogie quant à la marche, et j'emploierai les mêmes notations et la même figure qui est la *fig.* 5. Il suffit seulement d'observer que la courbe déformée l'est d'après la loi de la dilatation et qu'en

conséquence

$$(70)\qquad ds = (1+\varepsilon)\,ds_0.$$

De plus, comme $dr = (1+\varepsilon)\,dr_0$, on voit que

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds_0}{dr_0},$$

ou bien

$$d\theta = d\theta_0.$$

Par suite

$$\theta = \theta_0.$$

Je n'ajoute pas de constante, attendu que les valeurs de θ et de θ_0 sont les mêmes au point fixe. Le calcul se conduit maintenant tout à fait comme dans le cas que je viens de rappeler. En appelant encore ξ et η les coordonnées du centre de courbure d'un point quelconque de la courbe extrême déformée, on a

$$(71)\quad \begin{cases} d\xi = -(1+\varepsilon)\,dr_0 \sin\theta_0, \\ d\eta = (1+\varepsilon)\,dr_0 \cos\theta_0. \end{cases}$$

$$(72)\quad \begin{cases} \xi' = -r'\sin\theta'_0 = -(1+\varepsilon)\,r'_0 \sin\theta'_0, \\ \eta' = -\delta + r'\cos\theta'_0 = -\delta + (1+\varepsilon)\,r'_0\cos\theta'_0. \end{cases}$$

$$(73)\quad \begin{cases} \xi'' = -(1+\varepsilon)\,r'_0\sin\theta'_0 - (1+\varepsilon)\displaystyle\int \sin\theta_0\,dr_0, \\ \eta'' = -\delta + (1+\varepsilon)\,r'_0\cos\theta'_0 + (1+\varepsilon)\displaystyle\int \cos\theta_0\,dr_0. \end{cases}$$

$$(74)\quad \begin{cases} \xi''' = \xi'' - (\rho - r'')\sin\theta'' \\ \quad = \xi'' - (1+\varepsilon)\,\rho_0\sin\theta''_0 + (1+\varepsilon)\,r''_0\sin\theta''_0, \\ \eta''' = \eta'' + (\rho - r'')\cos\theta'' \\ \quad = \eta'' + (1+\varepsilon)\,\rho_0\cos\theta''_0 - (1+\varepsilon)\,r''_0\cos\theta''_0. \end{cases}$$

Remplaçant dans ξ''' et η''', ξ'' et η'' par leurs valeurs (73) et intégrant

par parties, $\int \sin\theta_0 dr_0$ et $\int \cos\theta_0 dr_0$, on a finalement

$$(75)\qquad \xi''' = -(1+\varepsilon)\rho_0 \sin\theta''_0 + (1+\varepsilon)\int \cos\theta_0 ds,$$

$$(76)\qquad \eta''' = -\delta + (1+\varepsilon)\rho_0 \cos\theta''_0 + (1+\varepsilon)\int \sin\theta_0 ds.$$

Il faut que ξ''' et η''' soient nulles, pour toutes les valeurs de ε. On doit donc égaler à zéro les seconds membres des équations (75) et (76). En les simplifiant à l'aide des relations (28) et (29), on voit que la première condition est satisfaite d'elle-même et que la seconde conduit à

$$(77)\qquad \delta = 0,$$

qui correspond à une courbe extrême partant du centre même des spires.

Ainsi, en prenant pour courbe extrême une courbe théorique partant de l'axe même du balancier, il arrivera que, par les changements de température, ses extrémités n'exerceront aucun effort contre l'axe du balancier, puisque, si un des bouts était fixe comme d'habitude et l'autre libre, celui-ci viendrait de lui-même remplir les conditions de position et d'inclinaison qui lui sont assignées.

Mais ce n'est pas tout et je vais démontrer que, le spiral étant déformé par le changement de température, les courbes extrêmes remplissent encore les conditions théoriques suivant lesquelles elles ont été construites.

En effet, appelons (x_1) et (y_1) les coordonnées du centre de gravité de la courbe extrême déformée par la dilatation et x_1 et y_1 celles du centre de gravité de la même courbe non déformée par la dilatation, et supposons qu'on ait pris pour axes coordonnés deux axes rectangulaires passant par le centre des spires, celui des x étant mené par le centre de gravité de la courbe non déformée et celui des y passant, par conséquent, par le point C, où la courbe extrême se raccorde avec les spires.

On a, par rapport à la courbe déformée,

$$\int s \sin\theta ds = \int s dy = sy - \int y ds.$$

et, en intégrant dans toute l'étendue de la courbe extrême,

$$(78)\qquad \int_0^l s\sin\theta\, ds = -\,l\rho\cos\theta'' - l(y_1).$$

D'un autre côté, en comparant les points correspondants des deux courbes, déformée et non déformée, on a

$$s = (1+\varepsilon)s_0;\quad ds = (1+\varepsilon)ds_0;\quad l = (1+\varepsilon)l_0,$$
$$\theta = \theta_0.$$

Donc

$$\int_0^l s\sin\theta\, ds = (1+\varepsilon)^2 \int_0^{l_0} s_0 \sin\theta_0\, ds_0$$

et

$$(79)\qquad \int_0^l s\sin\theta\, ds = (1+\varepsilon)^2(-\,l_0\rho_0\cos\theta''_0 - l_0 y_1).$$

En égalant les seconds membres des équations (78) et (79) et faisant attention que $l\rho\cos\theta'' = (1+\varepsilon)^2 l_0\rho_0\cos\theta''_0$, il reste

$$l(y_1) = (1+\varepsilon)^2 l_0 y_1;$$

et comme $y_1 = 0$, on voit que

$$(80)\qquad (y_1) = 0.$$

De même, on a

$$\int s\cos\theta\, ds = \int s\, dx = sx - \int x\, ds.$$

Donc

$$(81)\qquad \int_0^l s\cos\theta\, ds = l\rho\sin\theta'' - l(x_1).$$

D'un autre côté,

$$(82)\quad \int_0^l s\cos\theta\, ds = (1+\varepsilon)^2 \int_0^{l_0} s_0\cos\theta_0\, ds_0 = (1+\varepsilon)^2(l_0\rho_0\sin\theta''_0 - l_0 x_1).$$

Egalant les seconds membres des équations (81) et (82) et remarquant que $l\rho \sin\theta''$ se détruit avec $(1+\varepsilon)^2 l_0 \rho_0 \sin\theta''_0$, il reste

$$l(x_1) = (1+\varepsilon)^2 l_0 x_1;$$

mais $x_1 = \frac{\rho_0^2}{l_0}$; donc

$$l(x_1) = (1+\varepsilon)^2 \rho_0^2 = \rho^2$$

ou

(83) $$(x_1) = \frac{\rho^2}{l}.$$

Les relations (82) et (83) montrent donc que les courbes extrêmes remplissent les conditions relatives à l'isochronisme.

De l'influence du frottement du balancier.

Il est généralement reconnu que pour que les frottements du balancier soient négligeables, il convient que ses oscillations soient les plus grandes possibles.

Ceci résulte de la théorie. En effet, considérons le balancier alors qu'il s'éloigne de sa position d'équilibre, et soit μ le moment par rapport à son axe des forces de frottement quelles qu'elles soient. Dans cette période, le moment μ s'ajoute à l'action du spiral et on a

(84) $$A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M\alpha}{L} - \mu,$$

d'où l'on tire en multipliant par $2d\alpha$, intégrant et déterminant la constante de telle sorte que la vitesse soit nulle pour $\alpha = \alpha_0$,

$$A\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2\mu(\alpha_0 - \alpha)$$

et

(85) $$dt = \sqrt{\frac{A}{\frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2\mu(\alpha_0 - \alpha)}}\, d\alpha.$$

Si l'angle α_0 n'est pas très-petit, le terme $2\mu(\alpha_0 - \alpha)$ est extrêmement

inférieur à $\frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha^2)$ et l'on peut écrire :

$$dt = \sqrt{\frac{AL}{M(\alpha_0^2 - \alpha^2)}}\left(1 - \frac{2\mu L}{M}\frac{1}{\alpha_0 + \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{AL}{M(\alpha_0^2 - \alpha^2)}}\left(1 - \frac{\mu L}{M}\frac{1}{\alpha_0 + \alpha}\right) d\alpha$$

ou

$$(86) \qquad dt = \sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} - \frac{\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}\frac{1}{\alpha_0 + \alpha} d\alpha.$$

Je vais maintenant chercher le temps que le balancier emploierait à aller de sa position d'équilibre à celle qui correspond à $\alpha = \alpha_0$. Pour cela, il faut intégrer l'expression précédente. Or l'intégration, entre ces deux limites, de la première partie, $\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha^2}}$, donne, comme on sait, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{AL}{M}}$. Reste la seconde partie, savoir :

$$-\frac{\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}\frac{1}{\alpha_0 + \alpha} d\alpha,$$

laquelle s'intègre aisément en la transformant en fraction rationnelle, et l'on trouve pour son intégrale indéfinie, en négligeant la constante,

$$\frac{2\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\alpha_0}\frac{\alpha}{\alpha + \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Pour $\alpha = 0$, cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais on obtient facilement sa vraie valeur en cherchant les dérivées du numérateur et du dénominateur. On trouve ainsi, pour l'intégrale, depuis $\alpha = 0$, jusqu'à $\alpha = \alpha_0$,

$$(87) \qquad -\frac{\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\alpha_0},$$

ce qui montre que, dans la demi-oscillation ascendante, la durée de celle-ci est diminuée, par le fait du frottement, d'une quantité

égale à

$$\frac{\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\alpha_0}$$

ou d'une fraction d'elle-même égale à

$$\frac{2\mu L}{M}\frac{\pi}{\alpha_0}.$$

Quand le balancier revient vers sa position d'équilibre, le frottement agit en sens inverse du spiral, et dans cette demi-oscillation descendante on doit changer μ en $-\mu$ et, à cette différence près, on arrive encore à la relation (85). Seulement il faut aussi, dans celle-ci, changer le signe du radical, attendu que $d\alpha$ est négatif et que dt doit être positif.

En ayant égard à ces observations, le reste se termine de la même manière et l'on trouve que la durée de cette demi-oscillation est égale à $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{AL}{M}}$, augmentée cette fois, au lieu d'être diminuée de la même quantité

$$\frac{\mu L}{M}\sqrt{\frac{AL}{M}}\frac{1}{\alpha_0}.$$

Donc le temps définitif qui s'écoule entre deux passages successifs du balancier par sa position d'équilibre ou le temps d'une oscillation est égal à $\pi\sqrt{\frac{AL}{M}}$, c'est-à-dire le même que s'il n'y avait pas de frottement. Seulement on ne doit pas oublier qu'il faut pour cela que l'amplitude des oscillations soit assez grande et que le frottement soit suffisamment petit.

On s'explique très-bien ce fait signalé par le calcul, que la durée de la demi-oscillation ascendante soit diminuée par le frottement, tandis que celle de la demi-oscillation descendante est augmentée. En effet, quand le balancier s'éloigne de sa position d'équilibre, il est animé, à chaque instant, d'une vitesse plus grande que celle qu'il aurait s'il faisait, sans frottement, des oscillations de la même amplitude, sans quoi le frottement l'empêcherait d'arriver au même angle α_0. Donc la durée de cette demi-oscillation est diminuée par le frottement. Au contraire,

quand le balancier revient à sa position d'équilibre, il a en chaque point une vitesse moindre que celle dont il serait animé s'il avait parcouru sans frottement le même angle, depuis la même limite α_0, et par conséquent la durée de cette demi-oscillation est augmentée par le frottement.

A cause du frottement, s'il n'y avait pas l'influence de l'échappement, l'amplitude des oscillations irait continuellement en diminuant. Il est facile de trouver quel serait l'angle α_1 qui succéderait à α_0, à l'autre limite de l'oscillation. On a alors, en changeant dans la formule (84) μ en $-\mu$ et faisant $\frac{d\alpha}{dt} = 0$,

$$\frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) - 2\mu(\alpha_0 - \alpha_1) = 0;$$

d'où

$$\alpha_1 = -\alpha_0 + \frac{2\mu L}{M}, \tag{88}$$

ou encore, comme on a

$$G = \frac{M\alpha_1}{L},$$

G étant le moment de l'action du spiral contre le balancier, on voit que

$$\alpha_1 = -\alpha_0\left(1 - \frac{2\mu}{G}\right). \tag{89}$$

La formule (88) fait voir que le frottement diminue d'autant moins l'amplitude des oscillations, que le spiral est plus court et que son moment d'élasticité est plus grand.

La longueur déjà considérable de ce Mémoire a rendu nécessaire la suppression de ce qui restait du travail que j'ai présenté à l'Académie des Sciences. Mais je vais expliquer très-succinctement en quoi consistait cette dernière partie.

Elle comprenait : 1° la démonstration de la concordance entre les principes qui ont servi de base à la théorie du spiral et la théorie mathématique de l'élasticité; 2° les très-nombreuses expériences par les-

quelles j'ai constaté son accord, dans tous les cas possibles, avec l'observation.

Ces vérifications ont porté sur deux résultats principaux, savoir : 1° la formule qui donne la durée des oscillations du balancier et du spiral, et en particulier la proportionnalité, comme pour le pendule, entre cette durée et la racine carrée de la longueur développée du spiral; 2° l'influence exercée par la forme théorique des courbes extrêmes sur l'isochronisme.

Outre que cet accord a toujours existé d'une manière aussi parfaite qu'on pouvait le désirer, il est remarquable que les résultats de la théorie se trouvent toujours cadrer d'une manière singulière avec les notions générales qui sont admises dans la pratique.

Ainsi voici quelques citations :

D'abord un extrait du *Traité d'Horlogerie* de Moinet, ancien Président de la Société Chronométrique de Paris (1855). On y lit (t. I, p. 92) :

« L'isochronisme des vibrations ne se trouve que dans les spiraux dont les tours sont nombreux et par suite plus serrés ; ils s'ouvrent et se ferment ainsi plus concentriquement et ne tendent que faiblement à porter les pivots vers un côté quelconque de leurs trous, etc. »

On lit dans le même ouvrage (t. II, p. 424) :

« En raccourcissant un spiral trop long, il convient d'en ramener les deux extrémités vers le centre par une courbe adoucie et formée peu à peu au moyen de pinces à spiraux chauffées convenablement et qu'on laisse même refroidir dans leur action, afin que la lame conserve sa courbure. Celle-ci emploie un demi-tour et même trois quarts de tour pour se rapprocher du centre à environ la moitié du rayon des autres tours restés concentriques, etc., etc.

» La courbure des extrémités du spiral a pour but de le faire développer plus cylindriquement, et d'éviter qu'il ne se jette de côté dans les vibrations, ce qui changerait l'équilibre de l'ensemble, la distribution de sa puissance et même l'isochronisme des arcs de diverses étendues, etc. »

Dans le *Traité des Échappements* de Claudius Saunier (1855), ancien Directeur de l'école d'Horlogerie de Mâcon, on lit (p. 137) :

« Plus un spiral est long, plus il est propre à donner l'isochronisme

des vibrations et moins il occasionne de frottement aux pivots du balancier, son travail se faisant bien plus concentriquement à ses pivots qu'avec un spiral court qui les repousse fortement contre les parois du trou. »

Dans le même ouvrage, p. 296, on lit :

« Deux écoles, si nous pouvons parler ainsi, se sont formées à propos de l'isochronisme du spiral: l'ancienne, qui cherche l'isochronisme dans la seule longueur de la lame ; la nouvelle, qui le trouve, et plus facilement que l'ancienne, dans la longueur combinée avec la forme, c'est-à-dire par les courbes qui terminent cette lame. »

Et plus loin, p. 300, on lit :

« Les courbes intérieures et extérieures, ainsi que nous l'avons déjà recommandé à propos de l'échappement Duplex, doivent être faites avec beaucoup de soin; c'est en grande partie à la forme de ces courbes que le spiral doit son développement régulier et de n'être pas jeté de côté par les grandes vibrations. L'observation constante du jeu des spiraux, après avoir préalablement étudié leur forme, et des essais faits avec intelligence, apprennent promptement à l'ouvrier quelles sont les courbures qui régularisent le mieux ce développement. »

On lit encore dans le journal *la Tribune chronométrique*, numéro du 15 janvier 1851, p. 17 :

« Les artistes doivent s'attacher particulièrement à bien faire les courbes concentriques des deux extrémités du spiral qui doivent entrer l'une dans la virole du balancier, et l'autre dans le piton fixé sur le coq : car c'est de cette courbure que dépend en partie l'uniformité de durée dans les grandes comme dans les petites vibrations du balancier, et c'est là, comme nous l'avons dit, ce qui constitue l'isochronisme. »

On remarquera que tous ces principes généraux, qui sont éclos pour ainsi dire de l'expérience et de la pratique, sont une conséquence directe de ma théorie.

Je mentionnerai ici deux faits intéressants. Parmi les constructeurs qui ont bien voulu me demander communication de mes courbes, M. Jacob, chronométrier très-connu de Dieppe, m'a informé qu'un des types que je lui avais remis se trouvait être identique avec une forme de courbe à laquelle il avait été conduit par tâtonnements il y a une douzaine d'années et qu'il avait appliquée à un certain nombre d'ap-

pareils qu'il avait livrés à la marine. Quoique les spiraux n'eussent guère que six tours, ils avaient très-bien fonctionné, les appareils avaient satisfait à toutes les épreuves imposées par l'État et, après plusieurs années de service, leur marche qu'il avait relevée, était encore très-bonne. C'est le type qui répond à un angle de 255 degrés autour du centre.

J'ajouterai encore que, relativement aux spiraux plats à courbe extrême ramenée, M. Garnier, horloger de la Marine, m'ayant prié de lui faire, d'après la théorie, un tracé de courbe extrême dans des conditions données, celle que je lui ai remise s'est trouvée coïncider, à une différence insignifiante près, avec celle que les résultats d'une longue expérience lui avaient indiquée comme étant la plus convenable.

SOMME D'UNE SÉRIE;

Par M. BESGE.

La série dont je veux parler, savoir

$$1 + \frac{1}{1}\,\frac{1}{2.3^2} + \frac{1.3}{1.2}\,\frac{1}{2^2 5^2} + \frac{1.3.5}{1.2.3}\,\frac{1}{2^3 7^2} + \ldots,$$

a pour terme général

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2^n(2n+1)^2}.$$

J'ignore si l'on a déjà remarqué la valeur simple que voici de la somme S de cette série :

$$S = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}(\log 2)^2.$$

En tout cas cette valeur résulte immédiatement de l'équation suivante, que je trouve dans un Mémoire de M. Vinckler :

$$\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{\sqrt{e^{2t}-1}} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}(\log 2)^2.$$

Observez, en effet, que

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}} = e^{-t}\left(1 - e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

puis développez

$$\left(1 - e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en série par la formule du binôme, effectuez ensuite les intégrations

et divisez par 2. Vous arriverez précisément à l'équation écrite plus haut :

$$S = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{4}(\log 2)^2.$$

On me pardonnera, j'espère, ces quelques lignes au sujet d'une série dont la forme est élégante. Au reste, mon but est surtout d'attirer l'attention des géomètres sur les travaux de M. Vinckler, où l'on trouvera plusieurs résultats curieux.

SUR

LES DIVISEURS DE CERTAINES FORMES DE NOMBRES

QUI

RÉSULTENT DE LA THÉORIE DE LA DIVISION DU CERCLE;

PAR M. E.-E. KUMMER.

(TRADUCTION DE M. HOUEL.)

Si l'on partage en périodes les racines imaginaires de l'équation

$$x^p = 1,$$

p étant un nombre premier, et que l'on forme ainsi e périodes de f termes chacune, e et f étant tels qu'on ait

$$p - 1 = ef,$$

on sait que ces périodes sont les racines d'une équation algébrique du degré e, dans laquelle le coefficient du terme le plus élevé est égal à l'unité, tous les autres coefficients étant des nombres entiers. Soient x une racine imaginaire quelconque de l'équation

$$x^p = 1,$$

et g une racine primitive du nombre premier p. Ces périodes, que nous désignerons, pour abréger, par

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots \quad \eta_{e-1},$$

auront les valeurs suivantes,

$$\eta = x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e}},$$

$$\eta_1 = x^g + x^{g^{e+1}} + x^{g^{2e+1}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_{e-1} = x^{g^{e-1}} + x^{g^{2e-1}} + x^{g^{3e-1}} + \ldots + x^{g^{fe-1}}.$$

En posant maintenant

$$\varphi(y) = (y - \eta)(y - \eta_1)(y - \eta_2)\ldots(y - \eta_{e-1}),$$

on aura aussi

$$\varphi(y) = y^e + a_1 y^{e-1} + a_2 y^{e-2} + \ldots + a_{e-1} y + a_e,$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_e$ étant des nombres entiers, que l'on peut déterminer dans chaque cas particulier. Nous allons actuellement considérer cette fonction rationnelle et entière $\varphi(y)$ comme une forme sous laquelle on peut représenter certains nombres, et nous allons chercher les diviseurs que peut avoir cette forme. Pour cela, nous ferons usage de congruences où entreront non-seulement des nombres entiers réels, mais encore les périodes irrationnelles et souvent imaginaires

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1},$$

et, en conséquence, nous devrons commencer par fixer le sens que l'on doit attacher à de semblables congruences. Toute fonction rationnelle et entière de ces périodes, ayant pour coefficients des nombres entiers, peut se ramener, comme on sait, à la forme linéaire

$$c\eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_{e-1}\eta_{e-1},$$

et cela d'une seule manière. Nous attribuerons donc, en vue de notre but actuel, à l'idée de congruence une extension telle, que deux fonctions rationnelles et entières des périodes soient dites congruentes suivant le module q (lequel doit être un nombre premier), lorsque, après avoir réduit la différence de ces fonctions à la forme

$$c\eta + c_1\eta_1 + \ldots + c_{e-1}\eta_{e-1},$$

tous les coefficients $c, c_1, c_2, \ldots, c_{e-1}$ de cette différence sont divisibles par q. D'après cette définition, on peut ici, comme dans le cas des congruences ordinaires, négliger les termes qui contiennent en facteurs le module q; on peut aussi ajouter ces nouvelles congruences entre elles, les soustraire, les multiplier, et les élever à des puissances.

Nous prendrons maintenant pour point de départ cette proposition

connue, que, si q est un nombre premier, les coefficients

$$b,\quad b_1,\quad b_2,\ldots,\quad b_{q-1},$$

du produit développé

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-q+1)=z^q-b_1z^{q-1}+b_2z^{q-2}-\ldots+b_{q-1}z,$$

sont tous divisibles par q, à l'exception du dernier b_{q-1}, lequel, divisé par q, donne pour reste -1. En effet, pour toute valeur de z, ce produit, résultant de la multiplication de q nombres entiers consécutifs, est divisible par q. On a par suite

$$z^q-b_1z^{q-1}+b_2z^{q-2}-\ldots+b_{q-1}z\equiv 0 \pmod{q},$$

et puisqu'on a, d'après le théorème de Fermat,

$$z^q\equiv z,$$

il s'ensuit que

$$-b_1z^{q-1}+b_2z^{q-2}-\ldots+(b_{q-1}+1)z\equiv 0 \pmod{q}.$$

Mais cette congruence, de degré $q-1$, ne peut avoir q racines différentes. Elle doit donc être identiquement satisfaite, d'où résulte que l'on a

$$b_1\equiv b_2\equiv b_3\equiv\ldots\equiv b_{q-2}\equiv b_{q-1}+1 \pmod{q}.$$

Posons maintenant, dans l'équation précédente,

$$z=y-\eta_k,$$

et laissons de côté tous les termes divisibles par q : on obtiendra ainsi le congruence

$$\text{(A)}\left\{\begin{array}{c}(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k)\\ \equiv(y-\eta_k)^q-(y-\eta_k)\end{array}\right\}\pmod{q}.$$

Or on sait que, dans le développement de la puissance q d'un binôme, si q est un nombre premier, tous les termes, à l'exception du premier

et du dernier, sont divisibles par q. Donc

$$(y - \eta_k)^q \equiv y^q - \eta_k^q.$$

De plus, η_k est un polynôme de f termes, et lorsqu'on élève un semblable polynôme à la puissance q, les coefficients de tous les termes sont divisibles par q, excepté ceux des termes formés des puissances $q^{\text{tèmes}}$ des f termes du polynôme. Par conséquent, on a

$$\eta_k^q \equiv x^{qg^k} + x^{qg^{e+k}} + x^{qg^{2e+k}} + \ldots + x^{qg^{(f-1)e+k}} \pmod{q},$$

et, si l'on suppose

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

il résulte de là, en général,

$$\eta_k^q \equiv \eta_{r+k} \pmod{q},$$

mais, dans le cas particulier où $q = p$,

$$\eta_k^p \equiv f \pmod{p}.$$

La congruence

$$(y - \eta_k)^q \equiv y^q - \eta_k^q \pmod{q}$$

se change donc généralement en

$$(y - \eta_k)^q \equiv y - \eta_{k+r} \pmod{q},$$

et, pour le cas particulier de $q = p$, elle devient

$$(y - \eta_k)^p \equiv y - f \pmod{p}.$$

En donnant successivement à k, dans cette expression, les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 2, \ldots,\quad e - 1,$$

et faisant le produit, il vient

$$[\varphi(y)]^p \equiv (y - f)^e \pmod{p},$$

d'où il résulte que $\varphi(y)$ contient p en facteur pour $y \equiv f$, mais ne le contient pas pour toute autre valeur de y; en d'autres termes, la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{p}$$

a toujours une racine réelle, savoir

$$y = f = \frac{p-1}{e}.$$

Revenons à la recherche de la valeur générale du facteur premier q pour lequel on a

$$q \equiv g^r \pmod{p}.$$

Au moyen de la congruence

$$(y - \eta_k)^q \equiv y - \eta_{k+r},$$

la congruence (A) se change dans la suivante,

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{array}{c}(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k)\\ \equiv \eta_k - \eta_{k+r}\end{array}\right\} \pmod{q}.$$

Il faut distinguer ici deux cas: le premier, lorsque r est divisible par e; le second, lorsqu'il ne l'est pas. Si r est divisible par e, alors $\eta_k = \eta_{k+r}$, et par suite

$$(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k) \equiv 0 \pmod{q}.$$

En prenant successivement

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e-1,$$

et faisant le produit de toutes ces congruences, il vient

$$\varphi(y)\,\varphi(y-1)\,\varphi(y-2)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \pmod{q^e}.$$

Il faut donc que e de ces facteurs soient divisibles par q, ou bien que quelques-uns d'entre eux contiennent plusieurs fois ce facteur q,

toutes les fois que l'on a

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

et que r est divisible par e, c'est-à-dire toutes les fois que q est un résidu de puissance $e^{ième}$ pour le nombre premier. De là on déduit le théorème suivant :

Tout nombre premier qui est un résidu de puissance $e^{ième}$ de p, est un diviseur de la forme $\varphi(y)$; ou, en d'autres termes, la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q},$$

lorsque q est un nombre premier et en même temps un résidu de puissance $e^{ième}$ de p, a toujours e racines réelles, dont plusieurs peuvent devenir égales entre elles dans des cas particuliers.

Le cas particulier où les périodes sont composées chacune d'un seul terme, et où elles sont, par conséquent, égales aux racines imaginaires elles-mêmes de l'équation

$$x^p = 1,$$

donne ce résultat connu, que la congruence

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

a toujours $p - 1$ racines réelles, lorsque le nombre premier q est un résidu de puissance $(p-1)^{ième}$ de p, c'est-à-dire lorsque

$$q = 2mp + 1.$$

Après avoir fait voir que tous les nombres premiers, qui sont des résidus de puissance $e^{ième}$ de p, sont des diviseurs de la forme $\varphi(y)$, il reste en second lieu à examiner si cette forme a encore, ou non, d'autres diviseurs que ceux que nous venons de citer et le diviseur p. Soit donc encore

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

mais supposons r non divisible par e. Dans ce cas, si l'on remplace successivement, dans la congruence (B), k par

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad e - 1,$$

et que l'on fasse le produit des résultats, il vient

$$\varphi(y)\,\varphi(y-1)\,\varphi(y-2)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv \mathrm{P} \pmod{q},$$

en posant

$$\mathrm{P} = (\eta - \eta_r)(\eta_1 - \eta_{r+1})(\eta_2 - \eta_{r+2})\ldots(\eta_{e-1} - \eta_{r+e-1}).$$

P, étant une fonction symétrique de toutes les périodes, sera un nombre entier. Pour des valeurs déterminées de p et de e, lors même qu'on donne à r toutes les valeurs possibles, ce nombre P ne pourra contenir qu'un nombre fini, déterminé et relativement très-petit de facteurs premiers différents; et comme $\varphi(y)$ ne peut contenir d'autres facteurs premiers différents que ceux qui entrent dans P, il s'ensuit que c'est seulement dans des cas exceptionnels que $\varphi(y)$ pourra contenir un nombre toujours limité de ces facteurs qui ne sont pas des résidus de puissance $e^{\text{ième}}$ de p. Pour examiner de plus près dans quels cas ces facteurs premiers exceptionnels peuvent se rencontrer dans P et par suite dans $\varphi(y)$, nous emploierons la congruence

$$(\eta_k - \eta_{r+k})^q \equiv \eta_{k+r} - \eta_{k+2r} \pmod{q},$$

que l'on peut vérifier en jetant un simple coup d'œil sur les principes établis précédemment. En élevant les deux membres de cette congruence plusieurs fois de suite à la puissance q, on obtient la congruence plus générale

$$\text{(C)} \qquad (\eta_k - \eta_{r+k})^{q^h} \equiv \eta_{hr+k} - \eta_{(h+1)r+k} \pmod{q}.$$

Si l'on y fait successivement

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e-1,$$

et que l'on forme le produit, il vient

$$\left.\begin{array}{l} (\eta_k - \eta_{r+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \\ \equiv (\eta_k - \eta_{r+k})(\eta_{r+k} - \eta_{2r+k})\ldots(\eta_{(e-1)r} - \eta_{(e-1)r+k}) \end{array}\right\} \pmod{q}.$$

Si maintenant r n'a aucun facteur commun avec e, les indices des périodes

$$k,\quad r+k,\quad 2r+k,\ldots,\quad (e-1)r+k,$$

pris dans un autre ordre, seront congrus aux indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad e-1,$$

suivant le module e. Le produit qui compose le second membre n'est donc autre chose que le produit P, et comme, par hypothèse, P doit être divisible par q, on a donc

$$(\eta_k - \eta_{k+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv 0 \pmod{q}.$$

En élevant maintenant à la puissance $q-1$, on a

$$(\eta_k - \eta_{r+k})^{q^e-1} \equiv 0 \pmod{q},$$

puis, en multipliant par $\eta_k - \eta_{k+r}$,

$$(\eta_k - \eta_{r+k})^{q^e} \equiv 0 \pmod{q},$$

d'où résulterait, en vertu de la congruence (C),

$$\eta_k - \eta_{r+k} \equiv 0 \pmod{q},$$

ce qui est impossible. Le produit P n'a donc point de facteur premier q tel, que l'on ait

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

r n'ayant aucun facteur commun avec e. Donc, dans le cas où e est un nombre premier, on a le théorème suivant :

La forme $\varphi(y)$, lorsque son degré e est un nombre premier, n'a, outre le diviseur p, que des diviseurs résidus de puissance e par rapport à p.

Mais dans le cas où le degré de la forme $\varphi(y)$ n'est pas un nombre premier, le résultat trouvé peut s'énoncer comme il suit :

La forme $\varphi(y)$ n'a en général, outre le diviseur p, pour diviseurs que des nombres premiers, résidus de puissance e par rapport à p; mais elle peut, en outre, avoir encore un nombre fini et déterminé d'autres diviseurs, lesquels doivent être, par rapport à p, des résidus

de quelqu'une des puissances α, β, γ,..., en désignant par α, β, γ,..., les diviseurs e autres que l'unité.

On peut indiquer d'une manière encore plus précise les conditions pour que $\varphi(y)$ contienne des diviseurs spéciaux, qui ne soient pas résidus de puissance $e^{ième}$. Soit, en effet, α le plus grand diviseur commun de r et de e, et

$$r = r'\alpha, \quad e = e'\alpha;$$

dans la congruence (C) faisons successivement

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e' - 1,$$

et multiplions entre elles les congruences ainsi obtenues; il viendra

$$(\eta_k - \eta_{r+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv (\eta_k - \eta_{r+k})(\eta_{r+k} - \eta_{2r+k})\ldots(\eta_{(e'-1)r+k} - \eta_{e'r+k}).$$

En donnant ensuite à k les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 2,\ldots,\quad \alpha - 1,$$

et faisant la multiplication, le produit dans le second membre devient égal à P, comme on peut s'en convaincre immédiatement, en remarquant que les nombres de la forme $hr + k$, pour

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e' - 1, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \alpha - 1,$$
$$r = r'\alpha, \qquad\qquad e = e'\alpha,$$

donnent, relativement au module e, tous les restes

$$0,\quad 1,\quad 2,\ldots,\quad e - 1.$$

On a donc, P devant être divisible par q,

$$[(\eta - \eta_r)(\eta_1 - \eta_{r+1})\ldots(\eta_{\alpha-1} - \eta_{\alpha+r-1})]^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv 0 \pmod{q}.$$

En élevant encore à la puissance $q - 1$, et multipliant par

$$(\eta - \eta_r)(\eta_1 - \eta_{r+1})\ldots(\eta_{\alpha-1} - \eta_{\alpha+r-1}),$$

il vient

$$[(q-q_r)(q_1-q_{r+1})\ldots(q_{\alpha-1}-q_{\alpha+r-1})]^{q^{e'}} \equiv 0 \pmod{q},$$

relation qui, en vertu de la congruence (C), peut se mettre sous la forme plus simple

$$(q-q_r)(q_1-q_{r+1})\ldots(q_{\alpha-1}-q_{\alpha+r-1}) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Il faut donc déjà que le produit des α premiers facteurs du produit P contienne le facteur q, pour que P ou $\varphi(y)$ puissent le contenir. Cette condition restrictive pourrait faire soupçonner que ces facteurs exceptionnels, qui ne sont pas résidus de puissance e, pourraient bien ne pas exister non plus dans le cas où e est un nombre composé. Mais on peut s'assurer, sur un exemple simple, qu'il n'en est pas ainsi, et qu'il existe réellement de tels facteurs. Prenons

$$p = 109, \quad e = 6.$$

On a, par les méthodes connues,

$$\varphi(y) = y^6 + y^5 - 45y^4 - 10y^3 + 135y^2 + 9y - 27,$$

d'où il est facile de tirer, pour

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

les valeurs suivantes de $\varphi(y)$,

$$\varphi(0) = -3^3, \quad \varphi(1) = 2^6, \quad \varphi(2) = -173,$$
$$\varphi(3) = -2^6.3^3, \quad \varphi(4) = -4871, \quad \varphi(5) = -2^6.113.$$

Les diviseurs 2 et 3, qui se rencontrent dans ces valeurs, ne sont pas des résidus de puissance 6e de 109; ce sont donc des diviseurs tels que ceux que nous avons signalés. 2 est un résidu cubique, et 3 un résidu quadratique de 109, ce qui est parfaitement d'accord avec le théorème précédent. D'ailleurs, dans le cas actuel, 2 et 3 sont les seuls facteurs premiers de $\varphi(y)$ qui ne soient pas résidus de puissance 6e.

Nous allons considérer encore deux cas particuliers importants, pour lesquels nous ferons voir qu'il ne peut jamais exister de facteurs qui ne soient pas résidus de puissance $e^{\text{ième}}$ par rapport à p : ces cas sont celui où la période n'a qu'un terme, et celui où elle en a deux. Si l'on a

$$e = p - 1 \quad \text{et} \quad f = 1,$$

alors

$$\eta = x, \quad \eta_1 = x^g, \quad \eta_2 = x^{g^2}, \ldots;$$

par conséquent,

$$\mathrm{P} = (x - x^g)(x^g - x^{g^2})\ldots(x^{g^{p-2}} - x^{g^{p-1}})$$

et, en détachant du premier facteur x, du second x^g, du troisième x^{g^2},..., il vient

$$\mathrm{P} = (1 - x^{g-1})(1 - x^{g.g-1})\ldots(1 - x^{g^{p-2}.g-1}).$$

Puisque l'on a maintenant

$$(z - x^m)(z - x^{mg})\ldots(z - x^{m.g^{p-2}}) = z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1,$$

il viendra, en faisant $z = 1$, $m = g - 1$,

$$\mathrm{P} = p.$$

P ne contenant pas d'autre facteur que p, il en résulte la proposition connue que $y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + y + 1$ ne peut contenir, outre le diviseur p, que des facteurs résidus de puissance $(p-1)^{\text{ième}}$ par rapport à p, et représentés par conséquent par la forme linéaire

$$q = 2mp + 1.$$

Si maintenant les périodes sont à deux termes, c'est-à-dire si l'on a

$$e = \frac{1}{2}(p - 1), \quad f = 2,$$

alors

$$\eta = x + x^{-1}, \quad \eta_1 = x^g + x^{-g}, \quad \eta_2 = x^{g^2} + x^{-g^2}, \ldots,$$

et l'on sait que, dans ce cas,

$$\varphi(y) = y^e + y^{e-1} - \frac{e-1}{1} y^{e-2} - \frac{e-2}{1} y^{e-3} + \frac{(e-2)(e-3)}{1.2} y^{e-4} + \frac{(e-3)(e-4)}{1.2} y^{e-5} - \ldots.$$

De plus, on a

$$\eta_k - \eta_{r+k} = x^{g^k} + x^{-g^k} - x^{g^{r+k}} - x^{-g^{r+k}},$$

expression qui se décompose en facteurs de la manière suivante,

$$\eta_k - \eta_{r+k} = x^{g^k}\left(1 - x^{(g^r-1)g^k}\right)\left(1 - x^{-(g^r+1)g^k}\right).$$

En donnant maintenant à k les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad p-2,$$

et faisant le produit, on trouve facilement

$$P^2 = p^2.$$

d'où

$$P = \pm p.$$

Donc, dans ce cas encore, P n'a pas d'autre diviseur que p; d'où il résulte que la forme

$$\varphi(y) = y^e + y^{e-1} - \frac{e-1}{1} y^{e-2} - \frac{e-2}{1} y^{e-3} + \ldots$$

n'a, outre le diviseur p, que des diviseurs résidus de puissance $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ par rapport à p, lesquels sont par suite de la forme

$$2mp \pm 1.$$

La méthode que nous avons appliquée, dans ce qui précède, à la forme $\varphi(y)$, donne presque de la même manière les facteurs premiers d'une forme, beaucoup plus générale et très-remarquable, du degré e avec e indéterminées. En effet, si l'on multiplie entre elles les fonctions linéaires suivantes des périodes,

$$F(\eta) = z\eta + z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \ldots + z_{e-1}\eta_{e-1},$$
$$F(\eta_1) = z\eta_1 + z_1\eta_2 + z_2\eta_3 + \ldots + z_{e-1}\eta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(\eta_{e-1}) = z\eta_{e-1} + z_1\eta + z_2\eta_1 + \ldots + z_{e-1}\eta_{e-2},$$

leur produit

$$\Psi = F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\ldots F(\eta_{e-1})$$

sera une fonction homogène, de degré e et à coefficients entiers, des e indéterminées

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_{e-1}.$$

Cette forme, comme nous allons le faire voir, présente, relativement à ses diviseurs, une analogie complète avec la forme moins générale $\varphi(y)$ que nous venons d'étudier. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Tout nombre premier q, résidu de puissance $e^{\text{ième}}$ de p, est, ainsi que p lui-même, un diviseur de la forme Ψ.

Considérons d'abord le diviseur p. On a, d'après les principes dont on a fait précédemment usage,

$$F(\eta_k)^p \equiv (z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{e-1})^p \pmod{p};$$

si donc on choisit les indéterminées $z, z_1, z_2, \ldots, z_{e-1}$ de telle sorte que leur somme soit divisible par p, on aura alors

$$F(\eta_k)^p \equiv 0 \pmod{p};$$

et en faisant successivement

$$k = 0, \ 1, \ 2, \ldots, \ e-1,$$

et multipliant entre elles les congruences résultantes, il vient

$$\Psi^p \equiv 0 \pmod{p},$$

et par suite aussi

$$\Psi \equiv 0 \pmod{p};$$

p est donc un diviseur de la forme Ψ.

Pour démontrer ensuite que tout nombre premier q, résidu de puissance $e^{ième}$ par rapport à p, est toujours aussi un diviseur de Ψ, je suppose la seconde période η_1 mise sous la forme d'une fonction rationnelle et entière de la première période η, ce qui, comme on sait, est toujours possible. Soit donc

$$\eta_1 = \Theta(\eta);$$

alors on aura

$$\eta_2 = \Theta\Theta(\eta), \quad \eta_3 = \Theta\Theta\Theta(\eta), \ldots$$

Prenons, au lieu de η, une quantité indéterminée y, et formons l'expression

$$F(y).F(\Theta y).F(\Theta\Theta y)\ldots F[\Theta^{(e-1)}y] - \Psi,$$

laquelle sera une fonction rationnelle et entière de y. Cette expression s'annule évidemment si l'on y fait $y = \eta$, ou $y = \eta_1$, ou $y = \eta_2, \ldots$: elle doit donc contenir le facteur

$$(y - \eta)(y - \eta_1)(y - \eta_2)\ldots(y - \eta_{e-1}),$$

que nous avons désigné ci-dessus par $\varphi(y)$. On a, par conséquent,

$$F(y).F(\Theta y).F(\Theta\Theta y)\ldots F[\Theta^{(e-1)}y] - \Psi = \varphi(y).\Phi,$$

Φ désignant encore une fonction rationnelle et entière de y. Si l'on prend maintenant pour y une racine quelconque de la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$$

(laquelle a toujours e racines réelles, comme nous l'avons prouvé lors-

que q est un résidu de puissance $e^{ième}$ par rapport à p), on aura

$$F(y).F(\Theta y).F(\Theta\Theta y)\ldots F[\Theta^{(e-1)}y] \equiv \Psi \pmod{q}.$$

Si donc un facteur quelconque de ce produit devient divisible par q, Ψ deviendra également divisible par q. On peut donc toujours choisir les indéterminées

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_{e-1}$$

de telle manière que la forme Ψ admette le diviseur q, et la condition qui nous sert à fixer ces valeurs est simplement que, si dans l'expression

$$F(\eta) = z\eta + z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \ldots + z_{e-1}\eta_{e-1},$$

on remplace $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$, non plus par les racines de l'équation

$$\varphi(y) = 0,$$

mais par les racines de la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q},$$

prises dans un ordre convenable, on doit avoir

$$F(\eta) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Les facteurs premiers, résidus de puissance $e^{ième}$ par rapport à p, forment encore ici les diviseurs les plus importants de la forme Ψ, et ce n'est qu'exceptionnellement qu'il peut, outre ceux-là, en exister certains autres, dont nous allons étudier de plus près les conditions d'existence. Soit q un nombre premier tel que l'on ait

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

r n'étant pas divisible par e. On a alors

$$F(\eta)^q \equiv F(\eta_r) \pmod{q}.$$

Élevons cette congruence plusieurs fois de suite à la puissance q, ce

qui donne

$$F(\eta)^{q^h} \equiv F(\eta_{hr}) \pmod{q}.$$

Faisant successivement

$$h = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots, \ e-1,$$

et multipliant entre elles les congruences ainsi obtenues, il vient

$$F(\eta)^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv F(\eta)(\eta_r) F(\eta_{2r}) \ldots F(\eta_{(e-1)r}) \pmod{q}.$$

Si maintenant r et e n'ont aucun facteur commun, les indices

$$0, \quad r, \quad 2r, \quad 3r, \ldots, \quad (e-1)r$$

seront congrus suivant le module e avec les indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad e-1,$$

pris dans un autre ordre; donc le produit du second membre est égal à Ψ. Or Ψ devant admettre le diviseur q, il s'ensuit que l'on doit avoir

$$F(\eta)^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv 0 \pmod{q},$$

d'où résulte, comme précédemment,

$$F(\eta) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Mais, pour que $F(\eta)$ soit divisible par q, il faut que chacun des coefficients des périodes, et par suite que les indéterminées

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_{e-1}$$

soient toutes divisibles par q. De là nous concluons le théorème suivant :

S'il n'existe pas de facteurs communs à toutes les indéterminées de la forme Ψ, cette forme n'admettra pour facteurs premiers, outre le diviseur p, que des résidus de puissance e par rapport à p; en d'autres termes, si e contient les diviseurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, différents de l'unité, la

forme pourra aussi contenir des facteurs premiers, résidus de puissance α, ou β, ou γ,... par rapport à p.

On en déduit encore, comme corollaire, que *s'il n'existe pas de facteur commun à toutes les indéterminées de la forme Ψ, et que le degré e de cette forme soit un nombre premier, alors cette forme n'admettra, outre le diviseur p, que des diviseurs résidus de puissance e par rapport à p.*

Si e n'est pas un nombre premier et que α soit un diviseur de e, soit

$$q \equiv g^r \pmod{p},$$

et α le plus grand diviseur commun de r et de e, de sorte que l'on ait

$$r = r'\alpha, \quad e = e'\alpha.$$

En vertu de la congruence

$$F(\eta_h)^{q^h} \equiv F(\eta_{rh+k}) \pmod{q}$$

où l'on fera successivement

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e'-1,$$

et où l'on donnera ensuite à k les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \alpha-1,$$

il viendra, dans ce cas,

$$[F(\eta)\,F(\eta_1)\,F(\eta_2)\ldots F(\eta_{\alpha-1})]^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv \Psi \pmod{q};$$

car le produit des seconds membres est évidemment égal à Ψ, puisque, pour les valeurs en question de h et de k, l'expression $hr+k$ devient congrue suivant le module e à tous les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ e-1.$$

Si Ψ doit admettre maintenant pour facteur q, il s'ensuivra que l'on

devra avoir

$$[F(\eta)F(\eta_1)\dots F(\eta_{\alpha-1})]^{1+q+q^2+\dots+q^{e'-1}} \equiv 0 \pmod{q},$$

d'où l'on conclut aisément qu'il faudra aussi que l'on ait

$$F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\dots F(\eta_{\alpha-1}) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Donc, pour que Ψ admette un facteur premier q qui ne soit pas résidu de puissance e, mais seulement résidu de puissance α par rapport à p, α étant un diviseur de e, il faudra toujours que ce facteur q divise le produit des α premiers facteurs de Ψ.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $40\mu+11$, $40\mu+19$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu+11$, $40\mu+19$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier ($20\nu+3$ ou $20\nu+7$) qui ne divise pas y.

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m, de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu+11$, $40\mu+19$, on retranche les termes de la suite

$$5.1^2,\ 5.3^2,\ 5.5^2,\ 5.7^2,\ 5.9^2,\ldots,$$

qui ont une valeur moindre, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas y. Quant à la forme linéaire de p ($20\nu+3$ ou $20\nu+7$), elle est une conséquence de l'équation même

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

qui dans nos hypothèses sur m entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{4}, \qquad p \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

Considérons d'abord les nombres premiers $40\mu+11$. Le plus pe-

tit est 11, et l'on a

$$11 = 5.1^2 + 2.3.1^2,$$

conformément à notre théorème, 3 étant contenu dans la forme $20\nu + 3$. Ensuite vient 131, pour lequel on a les trois décompositions canoniques

$$5.1^2 + 2.7.3^2, \quad 5.3^2 + 2.43.1^2, \quad 5.5^2 + 2.3.1^2.$$

On en a également trois pour 211, savoir :

$$5.1^2 + 2.103.1^2, \quad 5.3^2 + 2.83.1^2, \quad 5.5^2 + 2.43.1^2.$$

Passons à la forme $40\mu + 19$. D'abord

$$19 = 5.1^2 + 2.7.1^2,$$

et

$$59 = 5.3^2 + 2.7.1^2;$$

car il ne faut pas compter l'équation $59 = 5.1^2 + 2.3^3$, l'exposant 3 n'étant pas de la forme $4l + 1$. Pour 139, qui vient ensuite, on a trois décompositions :

$$5.1^2 + 2.67.1^2, \quad 5.3^2 + 2.47.1^2, \quad 5.5^2 + 2.47.1^2.$$

Pour 179, on n'en a qu'une seule de l'espèce exigée, savoir :

$$179 = 5.3^2 + 2.67.1^2;$$

mais pour 379, on en trouve de nouveau trois,

$$5.3^2 + 2.167.1^2, \quad 5.5^2 + 2.127.1^2, \quad 5.7^2 + 2.67.1^2.$$

Il y en a aussi trois pour 419; les voici :

$$5.1^2 + 2.23.3^2, \quad 5.5^2 + 2.3.7^2, \quad 5.9^2 + 2.7.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\nu + 7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m, de la forme $40\nu + 7$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = (10x + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif : quant à p, c'est un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y.

L'expression $(10x + 1)^2$, en y prenant x positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$10s + 1, \quad 10s - 1,$$

savoir

$$1^2, \; 9^2, \; 11^2, \; 19^2, \; 21^2, \ldots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$m - 1^2, \quad m - 9^2, \quad m - 11^2, \quad m - 19^2, \quad m - 21^2, \ldots,$$

qu'on peut exprimer par

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. La forme ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), que nous attribuons à p, n'est qu'une conséquence de l'équation même que nous posons,

$$m = (10x + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

et de la forme linéaire de m, qui est $40\nu + 7$.

Le plus petit nombre de la forme $40\mu + 7$ est 7; c'est un nombre premier : or on a

$$7 = 1^2 + 2.3.1^2,$$

conformément à notre théorème. Ensuite vient

$$47 = 1^2 + 2.23.1^2.$$

Quant à 87, qui répond à $\mu = 2$, ce n'est pas un nombre premier; mais pour $\mu = 3$, on a 127 qui offre ces trois formes canoniques :

$$1^2 + 2.7.3^2, \quad 9^2 + 2.33.1^2, \quad 11^2 + 2.3.1^2.$$

Pour $\mu = 4$, on a 167, et 167 offre aussi trois décompositions du genre exigé :

$$1^2 + 2.83.1^2, \quad 9^2 + 2\ 43.1^2, \quad 11^2 + 2.23.1^2.$$

Comme dernier exemple, je prends 367, je trouve l'équation

$$367 = 19^2 + 2.3.1^2;$$

et cette fois encore notre théorème est vérifié.

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 23$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m, de la forme $40\mu + 23$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif : quant à p, c'est un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y.

L'expression $(10x + 3)^2$, en y prenant x positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$10s + 3, \quad 10s - 3,$$

savoir

$$3^2, \; 7^2, \; 13^2, \; 17^2, \ldots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$m - 3^2, \quad m - 7^2, \quad m - 13^2, \quad m - 17^2, \ldots$$

qu'on peut exprimer par

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. La forme ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), que nous attribuons à p, n'est qu'une conséquence de l'équation même que nous posons,

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

et de la forme linéaire attribuée à m, qui est $40\mu + 23$.

Le plus plus petit nombre de la forme $40\mu + 23$ est 23; c'est un nombre premier : or on a

$$23 = 3^2 + 2.7.1^2,$$

conformément à notre théorème. Ensuite vient (en laissant de côté les nombres composés)

$$103 = 3^2 + 2.47.1^2 ;$$

ici on ne doit pas compter l'équation $103 = 7^2 + 2.3^3$, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$. Je note encore 223, qui nous offre une seule décomposition canonique :

$$223 = 3^2 + 2.107.$$

Pour 263, il y en a trois, savoir :

$$3^2 + 2.127.1^2, \quad 7^2 + 2.107.1^2, \quad 13^2 + 2.47.1^2 ;$$

de même pour 383, qui peut s'écrire :

$$7^2 + 2.167.1^2, \quad 13^2 + 2.107.1^2, \quad 17^2 + 2.47.1^2.$$

Ces exemples suffiront.

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE VI.

De la marche des valeurs d'une fonction d'une seule variable. (Suite.)

APPLICATIONS.

85. Soit d'abord l'équation

$$y^2 = 2px + q^2$$

qui représente une parabole réelle et une infinité de paraboles imaginaires égales à la première et opposées à elle par un diamètre commun.

p étant supposé positif, toutes les conjuguées qui touchent la courbe réelle en des points situés au-dessus de l'axe des x ont leurs caractéristiques positives; celles qui la touchent en des points situés au-dessous de l'axe des x ont leurs caractéristiques négatives. Entre deux se trouve la conjuguée qui touche la courbe réelle à son sommet et dont la caractéristique est infinie; aucune conjuguée d'ailleurs n'a sa caractéristique nulle.

De quelque manière que x varie, C ne peut donc changer de signe

qu'en passant par l'infini, ce qui arrive lorsque le point $[x, y]$ passe sur la conjuguée $C = \infty$, ou quand x prend des valeurs réelles moindres que $-\frac{q^2}{2p}$, ou encore lorsque β passe par zéro, α étant moindre que $-\frac{q^2}{2p}$.

D'ailleurs chaque fois que, α étant moindre que $-\frac{q^2}{2p}$, β change de signe en passant par zéro, C change aussi de signe; car la partie imaginaire de y, qui est alors finie, ne peut pas changer brusquement de signe.

Il sera donc facile de répondre à toutes les questions qu'on pourrait se proposer sur les valeurs de y définies par l'équation que nous examinons.

D'après M. Cauchy, en supposant fermé le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, la solution finale est ou non identique à la solution initiale, selon que le rayon vecteur mené du point $\left[x = -\frac{q^2}{2p}, y = 0\right]$ au point $[\alpha, \beta]$ se trouve avoir décrit, dans le même sens, un angle égal à $4k\pi$ ou à $(4k+2)\pi$, lorsqu'il est revenu dans sa position initiale.

Il est facile de vérifier la concordance des résultats fournis par les deux méthodes; mais, tandis que la règle à laquelle nous arrivons pour un chemin quelconque, ne diffère pas de la règle relative à un chemin fermé, celle à laquelle est parvenu M. Puiseux, en cherchant à compléter la méthode de M. Cauchy, est d'une énorme complication.

M. Puiseux, après avoir réduit le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ à une ligne droite ou à tout autre chemin n'enveloppant pas le sommet de la parabole, proposerait, pour obtenir la valeur finale de y, la marche suivante :

Du point de départ $[\alpha_0, \beta_0]$ comme centre, avec un rayon moindre que la distance de ce point au sommet de la parabole, décrire une circonférence qui coupât le chemin en un point $[\alpha_1, \beta_1]$; calculer la valeur de y, correspondante à $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$, au moyen de la série de Taylor qui, on le sait, restera convergente pour toutes les valeurs de x dont les parties réelles et imaginaires seraient les abscisses et ordonnées de points de l'intérieur de cette circonférence; du point de rencontre de la première circonférence avec le chemin, en prenant

un rayon moindre que la distance de ce point au sommet de la parabole, décrire une deuxième circonférence qui rencontrât le chemin en un nouveau point $[\alpha_2, \beta_2]$: calculer la valeur de y correspondante à $x = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}$ au moyen d'un nouveau développement de y par la série de Taylor; continuer ainsi jusqu'à ce que l'extrémité du chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ se trouvât enveloppée par une dernière circonférence, et enfin calculer la valeur finale de y au moyen d'un dernier développement de la fonction, applicable à toutes les valeurs de x dont les parties réelles et imaginaires seraient les abscisses et ordonnées de points de l'intérieur de cette dernière circonférence.

Dans les cas plus compliqués, où l'équation

$$f(x, y) = 0$$

pourrait présenter 2, 3, 4, etc., points dangereux, il faudrait que chaque circonférence les évitât tous.

86. Soit en second lieu l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

qui représente une ellipse réelle et toutes les hyperboles imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces hyperboles ont leur caractéristique négative lorsqu'elles touchent l'ellipse dans le premier et le troisième quadrant, positive lorsqu'elles la touchent dans le deuxième et le quatrième. La conjuguée qui a pour axe transverse l'axe des x, a sa caractéristique infinie, celle qui a pour axe transverse l'axe des y a sa caractéristique nulle.

Il résulte de là que la caractéristique change de signe en passant par zéro lorsque le point de contact de l'ellipse avec la branche de conjuguée, sur laquelle se trouve le point $[x, y]$, passe du premier au deuxième quadrant, ou du troisième au quatrième, ou inversement, et qu'elle change de signe en passant par l'infini lorsque le même point de contact passe du deuxième au troisième quadrant, ou du quatrième au premier, ou inversement.

D'un autre côté, la conjuguée dont la caractéristique est infinie, a ses abscisses réelles et plus grandes que a, ou moindres que $-a$, et

celle dont la caractéristique est nulle, les a imaginaires sans parties réelles; par conséquent C ne peut changer de signe qu'aux époques où β passe par zéro, α^2 étant plus grand que a^2, ou bien où α passe par zéro, quel que soit alors β; c'est-à-dire aux instants où le point $[\alpha, \beta]$ passe sur l'axe des x, en dehors de l'ellipse, ou sur l'axe des y, en un point quelconque.

D'ailleurs quand β change de signe en passant par zéro, α^2 étant alors plus grand que a^2, la caractéristique change de signe, car la partie imaginaire de y conserve le sien. De même quand α change de signe en passant par zéro, la caractéristique change encore de signe; car la partie imaginaire de x, qui était finie, conserve son signe, et celle de y, qui était infiniment petite, en change. En effet, si le point de la conjuguée $C = 0$ par où passe le point $[x, y]$ a pour coordonnées

$$x = \beta\sqrt{-1},$$

et par exemple

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2+\beta^2};$$

le coefficient différentiel de y par rapport à x est alors

$$-\frac{b}{a}\frac{\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2+\beta^2}}.$$

Or si x augmente de $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, la partie imaginaire de y augmente de

$$-d\alpha\frac{b\beta\sqrt{-1}}{a\sqrt{a^2+\beta^2}},$$

quantité qui change de signe avec $d\alpha$ et qui est indépendante de $d\beta$.

En résumé donc, C change de signe chaque fois que le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ rencontre et traverse l'axe des y en un point quelconque, ou l'axe des x en dehors de l'ellipse; et par suite le point de départ $[x_0, y_0]$ ayant, par exemple, sa caractéristique positive, le point d'arrivée sera

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$$

et

$$y_1 = \alpha'_1 \pm \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

C_1 étant positif, suivant que le nombre des rencontres à compter se sera trouvé pair ou impair.

Ces conclusions s'accordent avec celles que fournit la méthode de M. Cauchy; car si le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, fermé, enveloppe l'un seulement des sommets de l'ellipse, situés sur l'axe des x, il traversera cet axe un nombre impair de fois en dedans de la courbe et un nombre impair de fois en dehors, et si d'ailleurs il traverse l'axe des y, il le traversera un nombre pair de fois; C changera donc de signe, par conséquent, le point de départ étant, par exemple,

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1},$$
$$y_0 = \alpha_0 + \beta_0 C_0 \sqrt{-1},$$

le point d'arrivée sera

$$x_1 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1},$$
$$y_1 = -\alpha_0 - \beta_0 C_0 \sqrt{-1},$$

l'une des valeurs de y aura permuté avec l'autre.

Au contraire, si le chemin enveloppe les deux sommets situés sur l'axe des x, il traversera cet axe un nombre impair de fois à droite en dehors de l'ellipse, un nombre impair de fois à gauche, aussi en dehors de l'ellipse, un nombre pair de fois en dedans, ce qui est indifférent, et l'axe des y un nombre pair de fois, c'est-à-dire un nombre impair de fois en allant de droite à gauche et un nombre impair de fois en allant de gauche à droite. En résumé, le nombre des rencontres à compter sera pair, C ne changera donc pas de signe et y reviendra à sa valeur initiale en même temps que x.

Les deux méthodes fournissent donc des résultats identiques, et si, dans notre théorie, les passages du point $[\alpha, \beta]$ sur l'axe des y et sur l'axe des x en dehors de l'ellipse ont une égale importance, tandis que dans celle de M. Cauchy les derniers seuls jouent un rôle déterminé.

cela tient à ce que la solution de M. Cauchy ne se rapporte qu'à l'hypothèse d'un chemin fermé.

Dans cette hypothèse, en effet, le chemin ne peut rencontrer l'axe des y qu'un nombre pair de fois; et comme quelque part que la rencontre ait lieu, l'effet produit est toujours un changement de signe de la caractéristique, l'effet intégral de cette suite de rencontres est nul, tandis que le même chemin fermé rencontrant l'axe des x un nombre également pair de fois, il y a cependant à distinguer entre les cas où le nombre des rencontres extérieures à l'ellipse est pair ou impair.

Dans le cas d'un chemin non fermé, nous tiendrions également compte des rencontres avec l'axe des y et avec l'axe des x, et si M. Puiseux ne s'occupe pas des premières, c'est qu'il laisse, dans ce cas, à la série de Taylor le soin de décider de la valeur finale de la fonction.

87. Considérons encore l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2 .$$

elle représente simultanément une hyperbole réelle et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative. La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre $-\infty$ et $-\frac{b}{a}$ ou entre $+\frac{b}{a}$ et $+\infty$, elle ne peut donc changer de signe qu'en passant par l'infini, ce qui arrive lorsque x passe par une valeur réelle comprise entre $-a$ et $+a$.

88. La discussion serait la même pour l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Elle représente simultanément une hyperbole réelle ayant pour axe transverse l'axe des y et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative. La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre $-\frac{b}{a}$ et $+\frac{b}{a}$, par conséquent elle ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Cela arrive lorsque y est réel et moindre que b, par conséquent lorsque x est imaginaire, sans partie réelle et moindre que a en valeur absolue

89. Il serait inutile de multiplier davantage les exemples qui se rapportent au second degré; nous prendrons maintenant la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0,$$

qui a été étudiée par M. Puiseux.

La courbe représentée par l'équation

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0$$

est MON (*fig.* 7), l'origine est un point d'inflexion, la tangente y est dirigée suivant la bissectrice de l'angle des axes; les points limites L et L' ont pour coordonnées

$$x = \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{a}{\sqrt{3}},$$

la courbe n'a pas d'asymptotes, mais la direction asymptotique est $y = 0$.

Les conjuguées dont la caractéristique n'est pas comprise entre 0 et 1 touchent la courbe réelle, les autres ont pour enveloppe la courbe M'ON' représentée par l'équation

$$y^3 + a^2 y - a^2 x = 0,$$

car pour que $\frac{dy}{dx}$ soit réel, il faut que α et α' soient nuls.

La conjuguée $C = 1$, ROSTOV, sépare les deux catégories et appartient à l'une et à l'autre; elle a encore cela de remarquable qu'elle est la seule dont les deux parties se touchent. Elle peut servir d'intermédiaire au point $[xy]$, soit pour passer d'une catégorie de conjuguées à l'autre, soit pour passer d'une portion à l'autre d'une même conjuguée, sans changer de catégorie, en traversant l'origine.

Cette conjuguée est déterminée par les équations

$$\alpha'^3 - 3\alpha'\beta^2 - a^2\alpha' + a^2\alpha = 0$$

et

$$3\alpha'^2 = \beta^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2\alpha = \pm\left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right)$$

ou

$$a^4\alpha^2 - \left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0;$$

de sorte que les rencontres des chemins

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et

$$a^4\alpha^2 - \left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

seront les points de passage, du point $[xy]$, des conjuguées d'une

catégorie sur celles de l'autre. Si les deux chemins se touchaient, sans se couper, le point $[xy]$ retournerait sur les conjuguées d'où il venait d'abord.

L'équation de la conjuguée $C = 1$, en coordonnées réelles, est

$$8y^3 + (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 y - (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 x = 0.$$

BLB_1, $B'L'B'_1$ est la conjuguée $C = \infty$, la conjuguée $C = 0$ est évanouissante.

L'origine étant le centre commun de toutes les conjuguées, une conjuguée quelconque touche l'une ou l'autre enveloppe en deux points symétriquement placés par rapport à l'origine. Celle qui touche l'enveloppe imaginaire aux points P, P' a pour caractéristique le coefficient angulaire de POP'.

Lorsqu'on cherche à annuler α, on trouve qu'il peut passer par zéro, en même temps que α', lorsque C est moindre que 1, et qu'il ne devient nul isolément que quand C est négatif et moindre en valeur absolue que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle à gauche de A ou à droite de A'.

Si l'on cherche les points de rencontre d'une conjuguée avec la courbe réelle, on trouve

$$\alpha' = \pm a\sqrt{\frac{1 - C}{6C}}$$

ou

$$\beta = \beta' = 0.$$

Ainsi il n'y a que les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire qui coupent la courbe réelle.

La figure représente celle dont la caractéristique est $\frac{4}{5}$.

Si l'on cherche le centre et le rayon de courbure d'une conjuguée au point où elle touche soit l'enveloppe réelle, soit l'enveloppe imaginaire, on trouve que les deux courbures de la conjuguée et de l'enveloppe sont égales et opposées.

Le calcul de vérification ne présente aucune difficulté, mais je ne le rapporterai pas ici, parce que, ayant soumis aux mêmes expériences

les conjuguées du lieu

$$y^4 + x^4 = a^4$$

dont je me suis occupé ensuite, et étant arrivé au même résultat, j'ai alors été conduit à rechercher à cet égard la règle générale.

Si $(r + r'\sqrt{-1})^2$ est la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

calculée en un point de l'une des deux enveloppes, le rayon de courbure, en ce point, de la conjuguée qui y passe, est

$$\frac{r^2 + r'^2}{r - r'}.$$

Cette expression, comme on voit, se réduit toujours à r, c'est-à-dire au rayon de courbure de l'enveloppe, quand il s'agit de l'enveloppe réelle ; elle donne encore le rayon r' de l'enveloppe imaginaire quand les coordonnées des points de cette enveloppe ont leurs parties réelles constantes, parce qu'alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ est imaginaire sans partie réelle ; mais dans le cas général les rayons de courbure

$$r + r' \quad \text{et} \quad \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

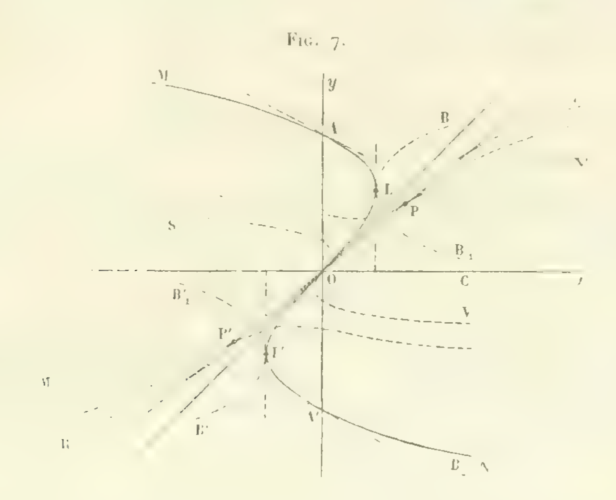
de l'enveloppe et de la conjuguée ne sont plus égaux.

On verra dans la quatrième partie de ce Mémoire la démonstration des règles que je viens d'énoncer ; je crois pouvoir en faire usage dès maintenant pour éviter des longueurs inutiles, et parce que la vérification des faits, dans chaque cas, sera toujours aisée à obtenir.

Cela posé, nous prendrons pour valeur initiale de x une valeur réelle, x_0, plus grande que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, égale à OC par exemple. A cette

valeur de x correspondront deux valeurs imaginaires que nous désignerons par t_0, u_0 qui fourniront les points B, B_1 de la conjuguée

Fig. 7.



$C = \infty$ et une valeur réelle v_0 qui fournira le point B_2 de la courbe réelle.

x variant ensuite d'une manière continue, les trois valeurs de y varieront elles-mêmes d'une manière continue, et nous désignerons par t, u, v ces trois fonctions.

Si x prend une valeur $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ infiniment voisine de x_0, α et β étant infiniment petits, les trois valeurs de y différeront peu de t_0, u_0, v_0; mais comme les parties imaginaires de t_0 et de u_0 étaient finies et de signes contraires, elles resteront encore de signes contraires; les deux points $[x, t]$, $[x, u]$ se transporteront donc sur des conjuguées tangentes à la courbe réelle en des points situés l'un au-dessous de L, l'autre au-dessus si β est positif, ou inversement dans le cas contraire.

Mais d'ailleurs le point $[x, t]$ sera encore sur la branche supérieure de la conjuguée qui le contiendra et le point $[x, u]$ sur la branche inférieure.

Quant au point $[x, v]$, il se sera transporté sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point voisin de B_2.

Il importerait peu de savoir ce qu'il est devenu, mais, pour ne laisser aucune difficulté sans solution, nous chercherons de quel côté il

se trouvera par rapport au point où la conjuguée qui le contient touche la courbe réelle.

Comme nous supposons $\alpha - x_0$ et β infiniment petits, nous pourrons réduire $v - v_0$ à

$$-\frac{a^2}{3v_0^2 - a^2}(\alpha - x_0 + \beta\sqrt{-1});$$

or la partie imaginaire de cette différence, qui sera la partie imaginaire de v, sera

$$-\frac{a^2}{3v_0^2 - a^2}\beta\sqrt{-1},$$

et comme v_0 est plus grand en valeur absolue que le double de l'ordonnée du point L qui satisfait à l'équation

$$3y^2 - a^2 = 0,$$

$3v_0^2 - a^2$ étant positif, la partie imaginaire de v sera de signe contraire à β, négative par conséquent si, comme nous l'avons supposé, β est positif.

Cela étant, si, sans changer la direction de l'axe des x, nous prenions pour nouvel axe des y la partie supérieure d'une parallèle, menée par l'origine, à la tangente à la courbe réelle au point où la touche la conjuguée à laquelle appartient le point $[x, v]$: les formules de transformation seraient

$$x = x' + y' \cos Y'X,$$
$$y = y' \sin Y'X;$$

x' serait réel, mais $\sin Y'X$ étant positif, la partie imaginaire de y' ou v' serait de même signe que la partie imaginaire de y ou v, c'est-à-dire négative : le point $[x, v]$ sera donc sur une branche inférieure.

Nous pouvons maintenant suivre de proche en proche les mouvements des trois points $[x, t]$, $[x, u]$, $[x, v]$.

Nous supposerons d'abord que x n'atteigne pas une valeur qui amènerait un des trois points sur la conjuguée $C = 1$.

Tant que β restera positif, le point $[x, t]$ restera sur une conjuguée

tangente à la courbe réelle en un point de OL et sur la branche supérieure de cette conjuguée.

Le point $[x, u]$ restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de LM et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Enfin le point $[x, v]$ restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de L′N et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Si β passe par zéro et change de signe à un moment où α soit encore plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, t et u étant restés imaginaires, les points $[x, t]$, $[x, u]$ seront restés à des distances finies de la courbe réelle; les signes des caractéristiques des conjuguées auxquelles ils appartiendront auront changé, mais ces points seront encore le premier sur une branche supérieure, le second sur une branche inférieure, et si x revenait à sa valeur initiale sans que β eût passé de nouveau par zéro, les trois points reviendraient à leurs places primitives.

Au contraire, si β passe par zéro, α étant compris entre o et $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, à ce moment les trois points se trouveront sur la courbe réelle, et si β change de signe, tous trois changeront de branches; par conséquent, si x revenait à sa valeur initiale sans que β eût passé de nouveau par zéro, dans l'intervalle, t prendrait la place de u, u celle de t, et v seul reviendrait à sa valeur initiale.

Revenons au point de départ $x = x_0$ et supposons toujours qu'aucun des trois points ne traverse la conjuguée $C = 1$ pour aller se rendre sur les conjuguées de la seconde série.

Tant que x ne passera pas par zéro, les deux points $[x, t]$, $[x, u]$ resteront toujours sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et le point $[x, v]$ sur celle qui la touche sur ON; les points $[x, t]$, $[x, u]$ pourront s'échanger entre eux un nombre indéfini de fois, mais, lorsque x reviendra à sa valeur initiale, le point $[x, v]$ reprendra toujours sa position primitive.

Supposons donc que x passe par zéro, et que ce soit par exemple le point $[x, t]$ qui passe à l'origine en suivant un chemin tangent à la droite $y = x$; si x change de signe en passant par zéro, le point

$[x, t]$ arrivera sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur ON et se trouvera par rapport au point $[x, v]$ dans la même situation où il était précédemment par rapport au point $[x, u]$. Si β passe par zéro, α étant compris entre o et $-\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, les points $[x, v]$ et $[x, t]$ changeront tous les deux de branches et pourront ensuite venir occuper chacun la place qu'avait précédemment l'autre, de sorte que si x revenait à sa valeur primitive x_0 en repassant de nouveau par zéro, v prendrait la valeur de t, t celle de v, et u reprendrait sa valeur initiale.

Nous avons ainsi fait s'échanger entre eux les points $[x, t]$ et $[x, u]$ en laissant d'abord la partie réelle de x positive; nous avons ensuite fait s'échanger les points $[x, t]$ et $[x, v]$ ou $[x, u]$ et $[x, v]$ en leur faisant traverser successivement l'origine des coordonnées qui était le seul point qui pût servir de passage entre les demi-conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et celles qui la touchent sur ON; nous allons maintenant faire passer nos trois points sur les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire.

Chaque fois qu'un des trois points passera sur la conjuguée $C = 1$, il pourra changer de série de conjuguées, et il sera facile de s'assurer de ce qu'il en est, car la marche de x étant définie, la différentielle de cette variable étant par conséquent connue, la différentielle de y pourra l'être aussi, et il sera toujours aisé de voir si $d\beta'$ surpasse ou non $d\beta$, c'est-à-dire si C a augmenté ou diminué.

Nous avons vu que la conjuguée $C = 1$ est définie par la relation

$$3a^4\alpha^2 = \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2:$$

chaque fois donc que le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ rencontrera le chemin

$$3a^4\alpha^2 = \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right),$$

un des trois points $[x, t]$, $[x, u]$, $[x, v]$ pourra changer de catégorie de conjuguées: il importera alors de savoir lequel des trois points subira ce déplacement; mais cette question ne présentera jamais de diffi-

culté, parce qu'ayant suivi jusque-là les passages de β par zéro, on saura toujours sur quelles branches se trouvent les trois points.

Ainsi en reprenant par exemple le même point de départ $x = x_0$, il est évident d'abord que le point $[x, v]$ ne pouvant parvenir à la conjuguée $C = 1$, sans traverser la conjuguée $C = \infty$, auquel cas l'un des points $[x, t]$, $[x, u]$ y serait venu aussi, ce qui exigerait ou qu'il eût traversé l'origine, ou qu'il fût momentanément passé sur les conjuguées de la seconde catégorie, pour les quitter ensuite, il est évident, disons-nous, que le point $[x, v]$ ne pourra pas arriver le premier sur la conjuguée $C = 1$.

D'un autre côté, quant aux deux points $[x, t]$ et $[x, u]$, il est évident que si β a d'abord reçu des valeurs positives et n'a pas changé de signe avant que

$$3a^4\alpha^2 - \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2$$

devînt nul, ce sera le point $[x, t]$ qui passera sur la conjuguée $C = 1$.

Supposons donc que le point $[x, t]$ ait passé sur les conjuguées de la seconde catégorie : tant qu'il y restera et que α ne changera pas de signe, il restera du même côté du point de contact de sa conjuguée avec l'enveloppe imaginaire; et si au contraire α change de signe, le point $[x, t]$ changera de branche sur sa conjuguée. En suivant donc les passages de α par zéro, on saura toujours où se trouve le point $[x, t]$; et s'il doit repasser sur les conjuguées de la première catégorie, on saura quelle branche de la conjuguée $C = 1$ il aura dû traverser.

90. Nous prendrons pour dernier exemple l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4$$

qui présente des particularités remarquables.

Si x est imaginaire et représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, y^4 est généralement imaginaire et de la forme $A + B\sqrt{-1}$; les deux valeurs de y^2

$$y^2 = \pm\sqrt{A + B\sqrt{-1}}$$

sont déterminées par les équations

$$A'^2 - B'^2 = A$$

et

$$2A'B' = B,$$

qui montrent que A′ ni B′ ne sont nuls quand B ne l'est pas.

Les valeurs de

$$y = \pm\left(A'' + B''\sqrt{-1}\right)$$

sont ensuite déterminées par les équations

$$A''^2 - B''^2 = A'$$

et

$$2A''B'' = B',$$

qui montrent de même que ni A″ ni B″ ne sont nuls si B ne l'est pas.

On voit aisément que les quatre valeurs de y se distinguent les unes des autres par les signes de leurs parties réelles et imaginaires, ces signes fournissent toujours les quatre combinaisons possibles, lorsque B est différent de zéro.

La valeur de B est

$$4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3,$$

elle n'est nulle que dans les hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \pm\beta$; mais dans la première il faut que β soit moindre que a pour que B′ soit aussi nul, et dans la seconde il faut que α soit moindre que a.

A″ et B″ ne peuvent en conséquence changer de signes qu'aux époques où α passe par zéro, β étant moindre que a, où β passe par zéro, α étant moindre que a, enfin où $\alpha = \pm\beta$.

Dans chacun de ces trois cas, deux valeurs de y sont réelles et les autres imaginaires sans parties réelles.

Les hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = +\beta$, $\alpha = -\beta$ devant jouer un rôle important dans la discussion qui va nous occuper, nous donnerons d'avance le tableau des valeurs de la différentielle de y dans les cas correspondants.

Premier cas.

$$\alpha = 0, \quad x = \beta\sqrt{-1}, \quad \beta < a$$

Les valeurs de y sont

$$\pm\sqrt[4]{a^4-\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt[4]{a^4-\beta^4}\sqrt{-1},$$

et celles de dy

$$\pm\frac{\beta^3\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(a^4-\beta^4)^3}}(d\alpha+d\beta\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \mp\frac{\beta^3}{\sqrt[4]{(a^4-\beta^4)^3}}(d\alpha+d\beta\sqrt{-1}),$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de y qui vient de s'annuler avec α, change aussi de signe avec lui.

Deuxième cas.

$$\alpha=0, \quad x=\beta\sqrt{-1}, \quad \beta>a.$$

Les valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\beta^4-a^4}\left|\begin{array}{c} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\beta^4-a^4)^3}}\left|\begin{array}{c} +1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \\ +1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

et celles de dy

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\beta^4-a^4)^3}}\left|\begin{array}{l} +(d\alpha+d\beta)-(d\alpha-d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha-d\beta)-(d\alpha+d\beta)\sqrt{-1} \\ +(d\alpha-d\beta)+(d\alpha+d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha+d\beta)+(d\alpha-d\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de y, on voit que, dans celles où $\alpha'=\beta'$, $\alpha'-\beta'$ change de signe avec α, et que dans

celles où $\alpha' = -\beta'$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui change de signe avec α. Dans les deux cas, il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de α' et de β'.

Troisième cas.

$$\beta = 0, \quad x = \alpha, \quad \alpha < a.$$

Les valeurs de y sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - \alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt[4]{a^4 - \alpha^4}\sqrt{-1},$$

et celles de dy

$$\mp \frac{x^3}{\sqrt[4]{(a^4 - x^4)^3}}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \mp \frac{x^3}{\sqrt[4]{(a^4 - x^4)^3}}(-d\beta + d\alpha\sqrt{-1}).$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de y qui vient de s'annuler avec β change aussi de signe avec lui.

Quatrième cas.

$$\beta = 0, \quad x = \alpha, \quad \alpha > a.$$

Les valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\alpha^4 - a^4}\left|\begin{array}{c} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{array}\right|$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{c} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{array}\right|$$

et celles de dy

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{r} (d\alpha - d\beta) + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \\ (d\alpha + d\beta) - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha - d\beta) - (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de y, on voit que dans celles où $\alpha' = \beta'$, $\alpha' - \beta'$ change de signe avec β, et que dans celles où $\alpha' = -\beta'$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui change de signe avec β. Dans les deux cas il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de α' et de β'.

Cinquième cas.

$$\alpha = +\beta, \quad x = \alpha(1 + \sqrt{-1}).$$

Les valeurs de y sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4},$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}(1 - \sqrt{-1}), \quad \text{et} \quad \pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}(1 + \sqrt{-1}),$$

et celles de dy

$$\pm \frac{2\alpha}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}\left[d\alpha + d\beta - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1}\right]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}\left[d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1}\right].$$

D'où l'on voit que celle des parties de y qui s'annule avec $\alpha - \beta$ change de signe avec cette différence.

Sixième cas.

$$\alpha = -\beta, \quad x = \alpha(1 - \sqrt{-1}).$$

Les valeurs de y sont, comme dans le cas précédent,

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4};$$

mais les dérivées et les différentielles de y changent.

les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}}(1+\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}}(-1+\sqrt{-1}),$$

et celles de dy

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}}\left[d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1}\right]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}}\left[-(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1}\right].$$

D'où l'on voit que celle des parties de y qui s'annule avec $\alpha + \beta$ change de signe avec cette somme.

Nous pourrions considérer la discussion comme terminée là, puisque α' et β' ne peuvent s'annuler et changer de signes que dans les hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \pm\beta$, et qu'on sait ce qui leur arrive dans chacun de ces cas; mais nous allons chercher à suivre la marche du point $[xy]$ sur la courbe réelle et sur ses conjuguées.

La courbe représentée par l'équation $y^4 + x^4 = a^4$ est comprise entre les droites $x = \mp a$, $y = \mp a$; elle renferme dans son intérieur le cercle $y^2 + x^2 = a^2$.

Tant que x ne prend que des valeurs réelles comprises entre $-a$ et $+a$, les valeurs de y sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - x^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 - x^4},$$

la portion de la conjuguée à abscisses réelles, qui s'étend entre les droites $x = \mp a$ ne se distingue donc pas de la courbe réelle.

Lorsque x prend des valeurs réelles non comprises entre $-a$ et $+a$, les quatre valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}\left|\begin{array}{c} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

La conjuguée à abscisses réelles, en dehors des parallèles $x = \mp a$, se compose donc de l'axe des x doublé et de la courbe qui en coordonnées réelles aurait pour équation

$$y^4 - 4x^4 = -4a^4.$$

La conjuguée dont les ordonnées sont réelles est égale à la conjuguée à abscisses réelles, seulement elle s'appuie sur l'axe des y au lieu de s'appuyer sur l'axe des x.

Si des valeurs réelles, $x = m$, $y = n$, des coordonnées, satisfont à l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4,$$

les mêmes valeurs affectées du signe $\sqrt{-1}$, $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ y satisfont aussi.

La caractéristique de la solution $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ est $\frac{n}{m}$; ainsi la conjuguée C passe par le point où la courbe réelle est coupée par la droite $y = Cx$, et elle la touche imaginairement en ce point, car la tangente à la courbe réelle au point $x = m$, $y = n$ est représentée par l'équation

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m),$$

et la tangente à la conjuguée $C = \frac{n}{m}$ au point $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ l'est par l'équation

$$y - n\sqrt{-1} = -\frac{m^3}{n^3}(x - m\sqrt{-1}),$$

qui ne fournit que la droite

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m).$$

La même conjuguée touche aussi la courbe réelle au point où la tangente à cette dernière est parallèle à $y = Cx$, mais les coordonnées de ce point sont réelles aussi bien sur la conjuguée que sur la courbe réelle.

La courbe réelle se trouve donc être à la fois l'enveloppe réelle et l'enveloppe imaginaire de toutes ses conjuguées.

Les asymptotes sont

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array} \right|$$

et si l'on se rappelle que la droite représentée dans le système C par l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x$$

est en coordonnées réelles

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right) x,$$

on en conclura que les asymptotes de la conjuguée C sont fournies par les équations

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right) x, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2} - C}\,x,$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2} + C}\,x, \qquad y = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{C}\right) x.$$

Chaque conjuguée se compose en réalité de quatre arcs indéfinis dont deux touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que les deux autres la touchent en des points imaginaires.

Nous pourrons cependant, pour simplifier le langage, considérer chaque conjuguée comme formée de la réunion de deux conjuguées de même caractéristique, mais de catégories différentes : la conjuguée de la première catégorie étànt composée des deux arcs qui touchent la courbe réelle en des points réels, et l'autre des deux autres arcs.

Les quatre branches indéfinies qui composent les deux arcs d'une même catégorie ont toujours pour asymptotes deux droites imagi-

naires conjuguées, soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{-1})\,x \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{-1})\,x,$$

soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \sqrt{-1})\,x \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{-1})\,x;$$

mais chacun de ces couples alterne d'une catégorie à l'autre lorsque C passe par zéro ou par l'infini; de telle sorte que les deux asymptotes

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right)x \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2} - C}\,x$$

appartiennent à la première catégorie quand C est négatif et à la deuxième quand C est positif, et inversement pour les deux autres. Cela se voit aisément si l'on fait la figure.

En effet, quand par exemple C devient infini, d'une part les asymptotes de catégories différentes

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} - C}\,x \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2} + C}\,x$$

se confondent en même temps que les arcs de catégories différentes auxquels elles appartiennent; car la partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}, \quad [x \text{ réel}, > a],$$

peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue aussi infinie; de même que la même partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}, \quad [x \text{ réel}, > a],$$

peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique négative serait devenue aussi infinie.

De même, deux branches opposées de la conjuguée $[C = \infty]$, qui ont pour asymptote commune

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right) x$$

ou

$$y = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{C}\right) x,$$

peuvent être considérées chacune comme les positions limites de branches de conjuguées des deux catégories dont les caractéristiques de signes contraires seraient devenues infinies.

Ainsi la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui est située dans le premier angle des axes est à la fois la limite des positions d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie; et il en est de même de la branche de la même conjuguée qui est située dans le troisième angle des axes.

Ce que nous venons de dire de l'axe des x et de la conjuguée $C = \infty$ pourrait au reste se répéter de l'axe des y et de la conjuguée $C = 0$.

Ces faits s'expliquent parce que les deux catégories de conjuguées ne se distinguent l'une de l'autre qu'en ce que celles de la première catégorie touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que celles de la seconde la touchent en des points imaginaires; or les deux conjuguées $C = \infty$, $C = 0$ touchent la courbe réelle en des points réels qui se dédoubleront chacun en un point réel et un point imaginaire pour peu que change C, d'où il résulte que ces deux conjuguées peuvent être considérées comme appartenant à la fois aux deux catégories. Il en est de même des parties de l'axe des x et de l'axe des y qui sont représentées dans l'équation proposée.

Il résulte de ce qu'on vient de voir que l'axe des x et l'axe des y

ainsi que les conjuguées $C = \infty$, $C = 0$, appartenant aux deux catégories de conjuguées, fourniront au point $[xy]$ un passage pour aller des conjuguées de l'une sur celles de l'autre.

C'est d'ailleurs le seul chemin qu'il pourra prendre, pour effectuer ce passage, tant qu'on lui interdira les points $y = 0, x = \pm a$. Mais autrement, s'il se trouvait sur une conjuguée de la première catégorie, on pourrait l'amener au point où cette conjuguée touche la courbe réelle, le faire passer sur la courbe réelle en l'un des points $y = 0$, $x = \pm a$, où son ordonnée, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, l'amener, en lui faisant parcourir la conjuguée $C = \infty$, en l'un des points $x = 0$, $y = \pm a\sqrt{-1}$, où son abscisse, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, le faire passer par les points de contact successifs des conjuguées de la seconde catégorie avec la courbe réelle, et l'amener ainsi au point de contact avec cette même courbe de l'arc sur lequel on voudrait le transporter et enfin lui faire suivre une des branches de cet arc.

Avant d'aller plus loin, nous chercherons à fixer les conditions dans lesquelles le point $[x, y]$, placé ou sur l'axe des x, représenté par l'une des équations

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

dans lesquelles x recevrait seulement des valeurs réelles plus grandes que a, ou sur l'une des conjugées $C = \infty$, $C = 0$, passe sur les conjuguées de l'une ou de l'autre catégorie.

1°. La partie de l'axe des x que représente l'équation

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche d'une conju-

guée de la première catégorie, dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche d'une conjuguée de seconde catégorie ayant sa caractéristique positive.

Par conséquent le point $[x, y]$, en passant sur l'axe des x, représenté par l'équation

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra négative ou positive.

2°. La même partie de l'axe des x, que représente aussi l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie ayant sa caractéristique positive infinie, et une branche de seconde catégorie ayant sa caractéristique négative infinie.

Par conséquent le point $[x, y]$ en passant sur l'axe des x, représenté par l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra positive ou négative.

3°. Les branches de la conjuguée $C = \infty$, qui occupent le premier et le troisième angle des axes, figurent, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche de seconde catégorie dont la caractéristique serait infinie, positive.

Au contraire, les branches qui occupent le second et le quatrième angle, figurent, dans leurs positions limites, des branches de première

et de seconde catégorie, dont les caractéristiques positive et négative seraient devenues infinies.

Par conséquent le point $[x, y]$, en passant sur la conjuguée $C = \infty$, se transportera, si sa caractéristique devient négative, sur une conjuguée de la première catégorie, lorsqu'il se trouvera dans le premier ou le troisième angle des axes, et sur une conjuguée de la seconde catégorie, s'il est dans le deuxième ou dans le quatrième angle. Ce serait le contraire si sa caractéristique devenait positive.

Les passages du point $[x, y]$ sur l'axe des y, ou sur la conjugée $C = 0$, donneraient lieu à des conclusions analogues.

Il est maintenant facile de suivre la marche du point $[x, y]$, correspondante à un chemin quelconque parcouru par x.

Prenons pour point de départ une valeur réelle de x, m, plus grande que a : les quatre valeurs correspondantes de y seront

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Supposons le point $[x, y]$ parti de

$$x = m, \quad y = s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Il se trouvera alors en un point M de la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui occupe le premier angle des axes, et si β, qui est actuellement nul, prend une valeur positive infiniment petite, comme β', qui est fini et positif, ne pourra devenir brusquement négatif, C prendra des valeurs positives, le point $[x, y]$ passera donc sur une conjuguée voisine de la

conjuguée $C = \infty$, appartenant à la deuxième catégorie, ayant sa caractéristique positive et tangente à la courbe réelle en un point P, voisin du sommet $x = 0$, $y = a\sqrt{-1}$, mais situé à droite de ce sommet.

Si x revenait à sa valeur initiale sans qu'aucune des circonstances $\beta = 0$ avec $\alpha < a$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\beta$ se fût présentée dans l'intervalle, y reviendrait aussi à sa valeur initiale : supposons donc que ces différentes circonstances se présentent, séparément d'abord.

Si, après avoir crû positivement, β redevient nul, α étant alors moindre que a, le point $[x, y]$ à ce moment se trouvera sur la conjuguée $C = \infty$, et si β et par suite C changent de signes, il passera sur une branche tangente à la courbe réelle en un point situé à gauche du sommet $x = 0$, $y = a\sqrt{-1}$; de sorte que si x revenait à sa première valeur sans qu'aucune des circonstances $\beta = 0$ avec $\alpha < a$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\beta$ se fût présentée de nouveau dans l'intervalle, y prendrait la valeur t, ou $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4}$, et le point $[x, y]$ viendrait se placer sur l'axe des x représenté par l'équation

$$y = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}.$$

Pendant ce temps le point $[x, y]$ qui serait parti de la position initiale $[x, u]$, se sera transporté sur une conjuguée de la deuxième catégorie ayant sa caractéristique négative, aura passé sur la conjuguée $C = \infty$ en même temps que le point qui venait de $[x, s]$, aura changé de branche en même temps que lui ; et finalement sera arrivé en $[x, v]$.

Le point parti de $[x, t]$ se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie, ayant sa caractéristique positive, sur la courbe réelle au moment où β aura passé par zéro, α étant moindre que a; et enfin sera venu en $[x, u]$.

De même le point parti de $[x, v]$ se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie ayant sa caractéristique négative, sur la courbe réelle au moment où β aura passé par zéro, α étant moindre que a, il aura changé de branche sur une conjuguée toujours de la

première catégorie, ayant toujours sa caractéristique négative, quand β aura changé de signe; et enfin sera venu en $[x, s]$.

En résumé, pendant que x sera revenu à sa valeur initiale, chacun des points

$$[x, s], \ [x, t], \ [x, u], \ [x, v],$$

sera venu occuper la place du suivant, et le dernier celle du premier.

Si x repassait encore par une série pareille de valeurs, les mêmes faits se reproduiraient dans le même ordre; de sorte qu'en faisant suivre à x quatre fois le même parcours, on ramènerait chaque point à sa position initiale.

Supposons maintenant que α puisse passer par zéro et changer de signe : en même temps il deviendra plusieurs fois égal à $\pm\beta$, de sorte que nous aurons examiné tous les cas qui peuvent se présenter.

Reprenons pour x la même valeur initiale $x = m > a$, et supposons encore que β prenne d'abord le signe $+$, que nous lui conserverons d'ailleurs dans tout ce qui suivra, puisque nous avons examiné les cas où il passe par zéro et change de signe; il est évident que nous aurions à répéter les mêmes choses dans un autre ordre, si nous supposions au contraire que β fût d'abord et restât négatif.

Les quatre valeurs initiales de y seront toujours

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Avant que α devienne nul, il faudra qu'il devienne égal à β; à ce moment les quatre valeurs de y seront

$$\pm\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}.$$

Comme α' ni β' n'auront pas encore jusque-là passé par zéro, celle de ces variables qui aura conservé une valeur finie, aura en même temps gardé son signe primitif; cette remarque permettra de décider en partie des valeurs qu'auront prises respectivement les quatre fonctions de x que représente y.

Ainsi s ne pourra être devenu que

$$+\sqrt[4]{a^4+4\beta^4} \quad \text{ou} \quad +\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

t sera

$$-\sqrt[4]{a^4+4\beta^4} \quad \text{ou} \quad +\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

u sera

$$-\sqrt[4]{a^4+4\beta^4} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

enfin v sera

$$+\sqrt[4]{a^4+4\beta^4} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}.$$

Pour achever de résoudre la question, nous remarquerons que dans chacune des quatre valeurs de y, α' et β', égaux en valeur absolue au point de départ, n'auront pas repassé par l'égalité puisque α ni β ne seront redevenus nuls; de telle sorte que l'ordre établi au commencement n'aura pas pu s'intervertir ensuite.

Or β qui était d'abord nul, prenant d'abord un accroissement positif, le tableau des valeurs de dy montre que : 1° dans la fonction de x qui part de la valeur s, et où $\alpha'=\beta'$, $d\beta'$ est plus grand que $d\alpha'$, de sorte que β' devient plus grand que α'; 2° que dans celle qui part de la valeur t, et où $\alpha'=-\beta'$, α' ayant d'ailleurs le signe $-$ et par suite β' le signe $+$, $d\alpha'$ et $d\beta'$ se composent de deux parties égales et de signes contraires qui, en venant s'ajouter à α' et β', ne troubleraient pas l'égalité $\alpha'=-\beta'$, et de deux parties aussi égales, mais négatives toutes deux, parce que $d\beta$ est positif, et qui venant s'ajouter à α' et β', font prendre la supériorité à α', de sorte que $-\alpha'$ devient plus grand que β'; 3° que dans la valeur de y qui part de la valeur u, où α' et β' sont égaux, $d\alpha'$ est plus grand que $d\beta'$, de sorte que α' devient plus grand que β'; 4° enfin que dans la valeur de y qui part de la valeur v où $\alpha'=-\beta'$,

α' ayant d'ailleurs le signe $+$, c'est encore α' qui prend l'avance sur $-\beta'$.

Il en résulte qu'au moment où α devient égal à β,

s devient $+\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}$,

t devient $-\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}$,

u devient $-\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}$,

et v devient $+\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}$.

Supposons maintenant que α devienne nul, β étant alors moindre que a, les quatre valeurs de y seront

$$\pm\sqrt[4]{a^4-\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4-\beta^4}.$$

et il s'agit d'attribuer ces valeurs aux quatre fonctions de x qui sont parties des valeurs initiales s, t, u, v.

Or dans aucune de ces quatre fonctions α' n'a pu devenir égal à β' en valeur absolue, sans quoi α ou β auraient passé par zéro, ni changer de signe, pour la même raison, cela exige évidemment qu'elles reprennent chacune pour $\alpha = 0$ la même valeur que pour $\alpha = \beta$.

Enfin supposons que α devienne nul, β étant alors plus grand que a, les quatre valeurs de y seront

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-1})\sqrt[4]{\beta^4-a^4}.$$

Pour les répartir, nous remarquerons encore que depuis le moment où α est devenu égal à β, α' ni β' n'ont pas pu repasser ni par zéro, ni par l'égalité de valeurs absolues, et comme nous savons d'ailleurs que quand l'ordre de grandeur de α et β change, la partie de y qui s'annule alors change ensuite de signe, nous en conclurons :

que s est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4-a^4}(-1+\sqrt{-1}).$$

que t est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - \alpha^4}\,(-1-\sqrt{-1}),$$

que u est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - \alpha^4}\,(1-\sqrt{-1}),$$

enfin que v est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - \alpha^4}\,(1+\sqrt{-1}).$$

On voit que les discussions de ce genre peuvent exiger quelquefois des développements fastidieux; mais les difficultés qu'elles présentent tiennent surtout à la complication de l'équation mise à l'étude. Or on ne pouvait évidemment pas demander que la discussion des lieux imaginaires, représentés par une équation, devînt plus simple que celle du lieu réel; il suffit qu'elle ne soit pas plus compliquée.

RÉSUMÉ

D'UNE

THÉORIE DES CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES

ET DES

SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES [*];

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; t. L, p. 623, 1055 et 1110; séances du 26 mars et des 11 et 18 juin 1860.)

CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES.

1. Concevons dans un plan une conique C et un cercle imaginaire; ces deux courbes donnent lieu aux propriétés suivantes :

1°. *Il existe trois points, toujours réels, dont chacun a la même droite pour polaire, dans le cercle et dans la conique.*

Cette droite est celle qui joint les deux autres points.

2°. *Il existe deux points, toujours réels, tels, que deux droites conjugées quelconques par rapport à la conique, menées par un de ces points, sont conjugées par rapport au cercle.*

En d'autres termes, ces deux points sont les points de concours des tangentes (imaginaires) communes au cercle et à la conique; ou, si l'on veut, sont les sommets réels du quadrilatère (imaginaire) circonscrit au cercle et à la conique.

3°. *Il existe deux droites toujours réelles, telles, que deux points conjugués quelconques par rapport à la conique, pris sur une de ces droites, sont conjugués par rapport au cercle.*

[*] Cette théorie est extraite du *Cours de Géométrie supérieure* professé à la Faculté des Sciences de Paris.

En d'autres termes, ces droites sont deux cordes communes au cercle et à la conique; ou, si l'on veut, sont les côtés réels du quadrilatère (imaginaire) inscrit au cercle et à la conique.

2. Soit O le centre du cercle, et $R\sqrt{-1}$ son rayon. Que par le point O on élève sur le plan de la figure une perpendiculaire OS, égale à R, le point S, extrémité de cette perpendiculaire, jouira des propriétés suivantes :

1°. *Si l'on a dans le plan de la figure un point et sa polaire relative au cercle imaginaire, la droite menée du point* S *à ce point, sera perpendiculaire au plan mené du même point* S *à la polaire.*

2°. *Les droites menées du point* S *à deux points conjugués par rapport au cercle, seront rectangulaires.*

3°. *Le plan mené du même point* S *à deux droites conjuguées par rapport au cercle, seront rectangulaires* [*].

3. Si l'on conçoit un cône qui ait pour sommet le point S, et pour base le cercle imaginaire, ce sera le cône asymptote d'une sphère, de rayon quelconque, ayant son centre en S.

Par conséquent, *la courbe d'intersection de la sphère par le cône sera le cercle imaginaire situé à l'infini.*

4. D'après cela, les propriétés du cercle imaginaire considéré sur le plan (**2**) donnent lieu aux propriétés suivantes du cercle imaginaire situé à l'infini sur la sphère :

1°. *L'arc polaire d'un point de la sphère, relatif au cercle imaginaire, est dans le plan perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de la sphère.*

2°. *Deux points conjugués par rapport au cercle imaginaire sont distants entre eux d'un quadrant.*

3°. *Deux arcs conjugués par rapport au cercle imaginaire sont rectangulaires.*

Ces notions relatives au cercle imaginaire situé à l'infini sur la sphère, servent à démontrer, avec une facilité extrême, une foule de

---

[*] Ces propositions sont démontrées dans le *Traité de Géométrie superieure* (ch. XXIII; p. 546-556).

propositions de la Géométrie sphérique. Mais nous ne devons les appliquer ici qu'à la théorie des coniques homofocales.

5. Concevons maintenant un cône ayant son sommet en S, et pour base la conique C :

1°. Les trois axes principaux de ce cône seront les droites menées du point S aux trois points, dont chacun a la même polaire dans la conique et dans le cercle imaginaire ;

2°. Ses deux plans cycliques [*] passeront respectivement par les deux cordes communes au cercle et à la conique ;

3°. Ses deux lignes focales seront les droites menées du point S aux deux points de concours des tangentes communes au cercle et à la conique.

6. Quand la conique C a un double contact avec le cercle imaginaire, le cône (S, C) est de révolution.

De sorte que :

Tous les cônes de révolution de même sommet, ont pour bases, sur un plan quelconque, des coniques qui ont toutes un double contact avec un même cercle imaginaire.

7. Concevons une sphère ayant son centre en S. Le cône (S, C) la coupera suivant une *conique sphérique* formée de deux courbes distinctes, égales et diamétralement opposées, qui proviennent des deux nappes du cône, et qu'on appelle *ellipses sphériques*.

Le cône qui a pour base le cercle imaginaire détermine sur la sphère, comme nous l'avons dit (3), le cercle imaginaire situé à l'infini.

Il résulte donc de ce qui précède (5) que :

Etant donnée une conique sphérique :

1°. *Il existe sur la sphère trois couples de points, opposés diamétralement deux à deux sur trois diamètres rectangulaires, tels, que l'arc*

---

[*] J'ai appelé *plans cycliques* d'un cône du second ordre, les deux plans menés par le sommet du cône parallèlement aux plans de ses sections circulaires. (*Voir* le *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second ordre*; inséré dans le t. VI des *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, année 1830.)

polaire de chacun d'eux par rapport à la conique passe par les points appartenant aux deux autres couples.

Ces points sont des *centres* de la conique sphérique.

2°. *Il existe deux arcs de grands cercles, tels, que deux points conjugués par rapport à la conique, pris sur un de ces arcs, sont distants d'un quadrant.*

Ces arcs sont appelés *arcs cycliques* de la conique.

3°. *Il existe deux couples de points, opposés deux à deux diamétralement, tels, que deux arcs conjugués par rapport à la conique, menés par un de ces points, sont toujours rectangulaires.*

Ces points sont appelés les *foyers* de la conique sphérique.

8. Les *centres*, les *arcs cycliques* et les *foyers* d'une conique sphérique définis ainsi par des propriétés spéciales qui ne comportent que l'idée de la conique même, sont susceptibles d'autres définitions qui dérivent de la considération du cercle imaginaire situé à l'infini. Ainsi l'on peut dire que :

1°. *Les centres d'une conique sphérique sont des points dont chacun a le même arc polaire par rapport à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini.*

2°. *Les arcs cycliques de la conique sont les deux arcs de grands cercles* (*toujours réels*) *sur lesquels se trouvent les points d'intersection* (*imaginaires*) *de la conique et du cercle ;* ou, si l'on veut, ces arcs sont les côtés réels du quadrilatère (imaginaire) inscrit à la conique et au cercle.

3°. *Les foyers de la conique sont les points de concours* (*toujours réels*) *des arcs tangents communs à la conique et au cercle ;* ou si l'on veut, sont les sommets réels du quadrilatère (imaginaire) circonscrit à la conique et au cercle.

On conçoit sur-le-champ combien ces nouvelles définitions, jointes aux notions premières du cercle imaginaire présentées ci-dessus (**4**), seront utiles dans une foule de questions, nous pourrions dire dans toutes les parties de la théorie des coniques sphériques.

Pour nous renfermer ici dans le seul sujet des coniques homofocales, nous en conclurons simplement ce principe, qui sera notre point de départ :

Deux coniques sphériques homofocales *sont deux coniques dont le quadrilatère circonscrit est aussi circonscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.*

9. Il résulte de là que : Toutes les propriétés relatives à un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère s'appliquent à un système de coniques homofocales.

Mais cette notion ne suffirait pas, si l'on omettait de remarquer qu'au nombre des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à un système de coniques homofocales, s'en trouve une qui n'est pas une conique homofocale, et qui néanmoins jouit des mêmes propriétés, comme conique inscrite au quadrilatère : cette courbe particulière est le cercle imaginaire situé à l'infini.

C'est la considération de ce cercle imaginaire qui conduit aux plus belles propriétés des coniques homofocales, et surtout à celles dont les démonstrations présenteraient souvent le plus de difficultés par d'autres voies.

10. Enfin, ce cercle imaginaire établit une relation fort simple entre tous les cercles tracés sur la sphère, relation singulière peut-être, mais qui nous sera d'une très-grande utilité. C'est que :

Tous les cercles (grands ou petits) tracés sur la sphère peuvent être considérés comme des coniques sphériques qui ont un double contact avec le cercle imaginaire à l'infini.

11. Après ces considérations générales et préliminaires, nous passons aux propriétés des coniques homofocales.

Ces propriétés sont extrêmement nombreuses; et leur nombre en rend l'exposition difficile, car il ne permet guère un classement méthodique qui serait si désirable.

Cependant nous avons cherché à renfermer la plupart et les plus importantes de ces propriétés dans quatre propositions très-générales, desquelles elles pussent se conclure comme simples conséquences, au moyen d'hypothèses particulières très-variées.

Voici quelles sont ces propositions générales :

THÉORÈME I. — *Étant données deux coniques homofocales A, A' et une*

troisième conique quelconque U, *si dans les quadrilatères* $\boxed{\mathrm{U\,A}}$ [*] *et* $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *on inscrit deux coniques quelconques* B, B′ : *le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux deux* A, A′, *et à une conique homofocale à* U.

Théorème II. — *Etant données deux coniques homofocales* A, A′ *et une troisième conique quelconque* U, *si dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{U\,A}}$ *on inscrit une conique* B : *on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *une conique* B′ *homofocale à* B.

Théorème III. — *Etant données trois coniques homofocales* A, A′, A″ *et une quatrième conique* U, *si dans les deux quadrilatères* $\boxed{\mathrm{U\,A}}$, $\boxed{\mathrm{U\,A'}}$ *on inscrit deux coniques* B, B′ : *les deux quadrilatères* $\boxed{\mathrm{A\,U''}}$ *et* $\boxed{\mathrm{BB'}}$ *seront circonscrits à une même conique* B″.

Théorème IV. — *Quand trois coniques quelconques* A, B, C *sont inscrites dans un même quadrilatère, si l'on décrit deux coniques* A′, B′ *homofocales à* A *et* B, *respectivement : on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{A'\,B'}}$ *une conique* C′ *homofocale à la troisième conique* C ;

Et les deux quadrilatères $\boxed{\mathrm{A\,B\,C}}$, $\boxed{\mathrm{A'B'C'}}$ *auront leurs huit côtés tangents à une même conique.*

Conséquences du théorème I.

12. La conique U est un arc de grand cercle limité à deux points : *Quand deux coniques sont homofocales, si de deux points de la*

---

[*] Nous désignons par $\boxed{\mathrm{U\,A}}$ le quadrilatère circonscrit aux deux coniques U et A, c'est-à-dire le quadrilatère formé par les quatre arcs de grands cercles (réels ou imaginaires) tangents aux deux coniques.

sphère on mène quatre arcs de grands cercles tangents à chacune d'elles, et formant ainsi deux quadrilatères circonscrits à ces courbes; et que dans ces quadrilatères on inscrive deux coniques quelconques B, B' : *le quadrilatère circonscrit à ces deux-ci sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux proposées, et à une conique ayant pour foyers les deux points pris sur la sphère.*

On peut prendre pour les coniques B et B' des arcs diagonaux limités chacun à deux sommets opposés du quadrilatère auquel chacune de ces coniques doit être inscrite.

13. Si les deux points pris sur la sphère s'approchent indéfiniment, et, à la limite, coïncident, le théorème prend cet énoncé :

Étant données deux coniques homofocales, si d'un point u *de la sphère, on leur mène des arcs tangents* [*], *et que par les points de contact sur chacune on mène une autre conique tangente en ces points à la même courbe : le quadrilatère circonscrit aux deux nouvelles coniques sera circonscrit tout à la fois à une conique homofocale aux proposées, et à un petit cercle ayant son centre sphérique en* u.

En raison de ce cercle, on peut ajouter, d'après un théorème ci-dessous (**20**), que : *Deux sommets opposés du quadrilatère sont situés sur une conique homofocale aux proposées; et les arcs tangents à cette conique en ces points passent par le centre sphérique du cercle.*

14. On peut prendre pour les coniques B, B' les arcs de cercle limités aux points de contact des arcs tangents aux deux coniques proposées; il s'ensuit cet énoncé :

Quand deux coniques sont homofocales, si d'un point u *de la sphère on leur mène des arcs tangents, et qu'on joigne par des arcs les points de contact de la première aux points de contact de la seconde : le quadrilatère formé par ces arcs sera circonscrit tout à la fois à une troisième conique homofocale aux proposées, et à un petit cercle ayant son centre sphérique en* u.

15. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B le pôle de contact :

---

[*] Il s'agira toujours, dans ce qui va suivre, d'arcs de grands cercles.

Étant données deux coniques homofocales A, A′ *et une conique* U *qui ait un double contact avec* A, *si dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *on inscrit une conique* B′, *et que du pôle de contact des deux coniques* U, A *on mène deux arcs tangents à cette courbe* B′ : *les deux points de contact seront sur deux coniques tangentes en ces points aux deux arcs menés par le pôle de contact, et dont l'une sera homofocale aux coniques* A, A′, *et l'autre homofocale à la conique* U.

16. On peut prendre pour la conique B′ une diagonale du quadrilatère $\boxed{\mathrm{UA'}}$ et pour la conique U l'arc limité aux deux points de contact sur A ; le théorème devient :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si de deux points* u, u_1 *de la première on mène quatre arcs tangents à la seconde : deux sommets opposés du quadrilatère formé par ces quatre arcs seront sur deux coniques tangentes en ces points aux arcs menés par le pôle de l'arc* uu_1, *et dont l'une sera homofocale aux coniques* A, A′, *et l'autre aura pour foyers les deux points* u, u_1.

17. Si la conique U, dans le théorème I, est un petit cercle de la sphère, le quadrilatère $\boxed{\mathrm{BB'}}$ sera circonscrit à un autre cercle de même centre sphérique.

Deux sommets opposés du quadrilatère seront situés sur une conique homofocale aux proposées et dont les arcs tangents en ces points passeront par le centre sphérique du cercle.

Si l'on suppose que le cercle devienne infiniment petit et se réduise à un point, on retrouve le théorème (**15**).

18. Quand la conique U est un petit cercle, comme nous venons de le supposer, on peut dire qu'elle a un double contact avec le cercle imaginaire situé à l'infini (**10**). Considérons celui-ci à l'instar des coniques homofocales (**9**), et prenons-le pour la conique A dans le théorème (**15**) ci-dessus, on aura cet énoncé :

Etant donnés deux petits cercles de même centre sphérique, U *et* B, *et une conique sphérique* A′, *si l'on inscrit dans le quadrilatère* $\boxed{\mathrm{UA'}}$

une conique quelconque B′ : *le quadrilatère* [B B′] *sera circonscrit à une conique homofocale à* A′.

19. On prend pour le cercle B le centre du cercle U; il en résulte que :

Étant donnés un petit cercle U *et une conique* A′, *si dans le quadrilatère* [U A′] *on inscrit une conique* B′, *et que du centre du cercle* U *on mène deux arcs tangents à cette conique : les deux points de contact seront sur une conique homofocale à* A′ *et tangente en ces points aux deux arcs menés par le centre du cercle* U.

20. Prenons pour la conique B′ l'arc diagonal limité à deux sommets opposés du quadrilatère [U A′]; il en résulte que :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique A′ *et à un cercle* U : *deux sommets opposés sont une conique homofocale à* A′; *et les arcs tangents à cette conique en ces points passent par le centre sphérique du cercle* [*].

Conséquences du théorème II.

21. La conique U peut être un arc de grand cercle limité à deux

[*] *Corollaire.* Quand le cercle est tangent à la conique en un point d, le quadrilatère circonscrit devient un triangle abc, dont le côté ac est l'arc tangent aux deux courbes en leur point de contact d; les côtés ab, bc sont les deux autres arcs tangents communs à ces courbes.

Les deux sommets a, c du triangle représentent deux sommets opposés du quadrilatère primitif; par conséquent *ils sont sur une conique homofocale à la proposée, et les arcs tangents à cette courbe en ces points passent par le centre sphérique du cercle.* Pareillement, le troisième sommet b du triangle et le point de contact d du côté ac représentent les deux autres sommets opposés du quadrilatère, et sont, par conséquent, *sur une autre conique homofocale, dont les arcs tangents en ces points passent aussi par le centre sphérique du cercle.*

Cette conique est déterminée par le seul point d; de sorte que si l'on a une infinité de cercles tangents à la conique au même point d, le lieu des sommets b des angles sphériques circonscrits à la conique et à chaque cercle est une conique homofocale.

Mais c'est surtout la première partie du théorème, savoir, que les deux sommets a, c

points. Ces points peuvent coïncider; dans ce cas, le théorème prend cet énoncé :

Quand deux coniques spheriques A, A′ *sont homofocales, si d'un point* u *de la sphère on leur mène des arcs tangents, et que par les points de contact de la première* A *on mène une conique* B *tangente à* A *en ces points : par les points de contact de la seconde* A′ *on pourra mener une conique* B′ *tangente à* A′ *en ces points et homofocale à* B.

22. On peut prendre pour la conique B l'arc de grand cercle limité aux deux points de contact de A ; il s'ensuit que :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales; si d'un point de la sphère on leur mène des arcs tangents : on pourra faire passer par les deux points de contact de l'une une conique tangente à celle-ci en ces points et ayant pour foyers les deux points de contact de l'autre.*

De sorte qu'on peut dire :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales : deux points de l'une* A *peuvent être pris pour les foyers d'une conique qui ait un double contact avec l'autre* A′; *les arcs tangents à celle-ci, menés par les deux points de contact, passeront par le point de concours des arcs tangents à la première* A *menés par les deux points pris sur cette courbe.*

23. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B le pôle de contact; il s'ensuit que :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si une conique* U *a un double contact avec la première : le quadrilatère* $\boxed{\text{U A}'}$ *sera circonscrit à un cercle dont le centre sphérique sera le pôle de contact des deux coniques* A *et* U.

24. On peut prendre pour la conique U un arc limité à deux points de A; il s'ensuit que :

---

du triangle sont sur une conique homofocale à la proposée, qui offre de l'intérêt ; car elle conduit immédiatement à une belle propriété du polygone d'un nombre de côtés donné, circonscrit à une conique sphérique, de périmètre minimum, savoir que *les sommets de ce polygone sont situés sur une conique homofocale;* ce qui a lieu aussi pour la portion de polygone, d'un nombre de côtés donné, de périmètre minimum, circonscrite à un arc donné de conique sphérique.

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si de deux points* u, u_1 *de la première on mène des arcs tangents à la seconde : le quadrilatère formé par ces arcs est circonscrit à un cercle dont le centre sphérique est le point de concours des arcs tangents à la conique* A *en ses deux points* u, u_1.

En d'autres termes : *Quand deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique sphérique* A′ *sont situés sur une conique homofocale* A : *ce quadrilatère est circonscrit à un petit cercle dont le centre sphérique est au point de concours des arcs tangents à la conique* A *menés par les deux sommets du quadrilatère* [*].

Cette proposition est la réciproque du théorème (**20**).

25. La conique U a un double contact avec A, et on prend pour la conique B l'arc qui joint les deux points de contact :

Quand deux coniques A, A′ *sont homofocales, si une conique* U *a un double contact avec* A : *on pourra inscrire dans le quadrilatère* $\boxed{\text{U A}'}$ *une conique ayant pour foyers les deux points de contact de* U *avec* A.

Conséquences du théorème III.

26. Supposons que la conique U se réduise à un point; il s'ensuivra que :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont homofocales, si d'un point* u *de la sphère on leur mène des arcs tangents ; et que par les points de contact des deux premières on mène deux autres coniques* B, B′ *tangentes à ces courbes en ces points : on pourra inscrire dans le quadrilatère*

---

[*] Ce théorème, sauf la détermination du centre du cercle, se trouve dans le *Mémoire sur les propriétés des arcs d'une conique dont la différence est rectifiable* (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* t. XVII, p. 841 ; année 1843). Il a une grande importance, parce que c'est de là que se déduisent les belles propriétés des polygones de périmètre minimum circonscrits à des arcs de coniques, qui sont le sujet de ce Mémoire. En faisant connaître ces propriétés pour les coniques planes, j'ai annoncé qu'elles s'appliquaient aux coniques sphériques, et que c'était même un des avantages inhérents au point de vue géométrique sous lequel je considérais ces questions.

| B B′ | *une conique* B″ *tangente à la troisième conique homofocale* A″ *en ses deux points de contact par les arcs menés du point* u.

27. On peut prendre pour les coniques B, B′ les arcs limités aux points de contact des coniques A, A′. Donc :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont homofocales, si d'un point de la sphère on mène des arcs tangents aux deux premières* A, A′, *et qu'on joigne les deux points de contact de* A *aux points de contact de* A′ *par quatre arcs de grands cercles : on pourra inscrire dans le quadrilatère formé par ces arcs une conique ayant un double contact avec la troisième conique* A″; *les arcs tangents à ces deux courbes en leurs points de contact passeront par le point pris sur la sphère.*

Si dans ce théorème et le précédent on prend, à la place de la troisième conique A‴, le cercle imaginaire situé à l'infini, on retrouve la seconde partie des théorèmes (**13** et **14**).

Conséquences du théorème IV.

28. On peut prendre pour les coniques B, B′ les arcs limités respectivement aux foyers des deux courbes A, A′; on en conclut que :

Quand trois coniques quelconques A, B, C *sont inscrites dans un même quadrilatère : les arcs menés des foyers de la première aux foyers de la seconde forment un quadrilatère dans lequel on peut inscrire une conique homofocale à la troisième;*

Ce quadrilatère et celui dans lequel sont inscrites les trois coniques proposées ont leurs huit côtés tangents à une même conique.

29. Que l'une des trois coniques soit un cercle, C par exemple, il suit alors du théorème général que :

Quand deux coniques A, B *sont inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on décrit deux coniques* A′, B′ *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : le quadrilatère circonscrit à ces deux coniques sera circonscrit à un cercle ayant le même centre sphérique que le premier;*

Et les deux quadrilatères auront leurs huit côtés tangents à une même conique.

30. On peut prendre pour les deux coniques A′, B′ les arcs limités aux foyers de A et de B. Donc :

Quand deux coniques A, B *sont inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle : les arcs de grands cercles menés des foyers de l'une aux foyers de l'autre forment un quadrilatère circonscrit à un second cercle qui a le même centre sphérique que le premier ;*

Ce quadrilatère et celui qui est circonscrit aux coniques proposées ont leurs huit côtés tangents à une même conique.

31. Quand les deux coniques A, B ont un double contact, on peut prendre pour la troisième C, soit le pôle de contact, soit l'arc de grand cercle limité aux deux points de contact; il en résulte ce théorème :

Quand deux coniques A, B *ont un double contact, si l'on décrit deux autres coniques* A′, B′ *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : on pourra inscrire dans le quadrilatère* |A′B′|, *premièrement un cercle ayant pour centre sphérique le pôle de contact des deux coniques* A, B ; *secondement une conique ayant pour foyers les deux points de contact de ces courbes* A *et* B; *et troisièmement une conique tangente à ces deux* A, B *en leurs deux points de contact.*

On peut prendre pour les deux coniques A′, B′ les arcs limités aux foyers des deux proposées A, B.

32. La conique B peut être l'arc limité à deux points b, b_1 de A; il en résulte ce théorème :

Quand on a deux coniques homofocales A, A′, *si l'on décrit une troisième conique quelconque* B′ *qui ait pour foyers deux points* b, b_1 *de* A :

le quadrilatère |A′B′| *sera circonscrit à un cercle ayant pour centre sphérique le point de concours des arcs tangents à* A *en ses points* b, b_1 ;

Et dans ce quadrilatère on pourra inscrire une conique tangente à A *aux deux points* b, b_1.

33. On peut prendre pour la conique A′ la conique A elle-même ; il en résulte que :

Quand une conique B′ *a ses foyers sur une conique* A, *le quadrilatère circonscrit à ces deux courbes est toujours circonscrit à un petit*

cercle dont le centre sphérique est au point de concours des arcs tangents à la conique A *menés par les foyers de* B′.

34. On conçoit que la considération du cercle imaginaire à l'infini sur la sphère, de laquelle nous venons de faire dériver de nombreuses propriétés des coniques sphériques homofocales, donne lieu à une théorie, également simple et féconde, des *coniques sphériques homocycliques*.

Du reste les propositions dans ces deux théories se correspondent, et l'on passe des unes aux autres sans difficulté, par le seul principe des figures sphériques *supplémentaires*.

SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES.

Préliminaires.

1. Par la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre passent une infinité d'autres surfaces du même ordre; et au nombre de ces surfaces se trouvent quatre cônes. Le sommet de chaque cône a pour plan polaire, dans toutes les surfaces, le plan des sommets des trois autres cônes.

Cette propriété des surfaces du second ordre a été démontrée en premier lieu par M. Poncelet dans le *Supplément* de son *Traité des propriétés projectives des figures*, et il en a conclu ensuite, par la théorie des polaires réciproques, que la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre admet quatre sections planes qui sont simplement du second ordre, c'est-à-dire des coniques; et que ces courbes sont situées dans les quatre plans dans lesquels se trouvent aussi, trois à trois, les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe d'intersection des deux surfaces [*].

M. Poncelet a appelé ces courbes *lignes de striction* de la développable; parce que ce sont des lignes de pénétration des nappes de cette surface.

---

[*] *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, art. 103; voir *Journal de Mathématiques* de Crelle, t. IV, p. 37, année 1829.

2. On peut inscrire dans la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre [*] une infinité d'autres surfaces du même ordre; de même que l'on peut mener par la courbe d'intersection des deux surfaces une infinité d'autres surfaces du même ordre.

Chacune des surfaces inscrites dans une développable est déterminée si l'on donne un plan auquel elle doive être tangente.

Les quatre coniques, lignes de striction de la développable, représentent quatre de ces surfaces, qui se distinguent de toutes les autres, en ce que chacune d'elles a un de ses trois axes principaux nul. Disons que ce sont des surfaces du second ordre infiniment aplaties et limitées par le contour de chaque section conique. C'est ainsi que nous considérons dans la théorie des coniques planes une droite limitée à deux points, et dans la théorie des coniques sphériques un arc de grand cercle limité à deux points, comme représentant une conique, plane ou sphérique, infiniment aplatie.

Une surface du second ordre et une conique, situées d'une manière quelconque dans l'espace, déterminent une développable circonscrite, dans laquelle on peut inscrire une infinité d'autres surfaces du second ordre : cette développable a trois lignes de striction autres que la conique proposée qui forme la quatrième.

De même, deux coniques situées d'une manière quelconque dans l'espace déterminent une développable circonscrite, dans laquelle on peut inscrire une infinité de surfaces du second ordre; cette développable a deux lignes de striction autres que les coniques données.

3. La développable circonscrite à deux surfaces du second ordre peut être imaginaire; ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de deux ellipsoïdes dont l'un est renfermé dans l'autre.

Mais, de ce qu'une développable est imaginaire, il ne faut pas en conclure que toutes ses lignes de striction le soient aussi; car il existe une infinité de surfaces du second ordre qu'on peut dire inscrites dans la développable imaginaire; et une ou plusieurs de ces surfaces peu-

---

[*] Cette développable est du huitième ordre; ce que nous avons démontré dans l'*Aperçu historique*, p. 250.

vent se réduire à des coniques, comme dans le cas où la développable est réelle.

Des deux coniques qu'on prend pour lignes de striction, et qui déterminent une développable, une ou toutes les deux peuvent être imaginaires; de même que, des deux cônes qui déterminent une courbe d'intersection (réelle ou imaginaire) par laquelle passent une infinité de surfaces du second ordre, un ou tous les deux peuvent être imaginaires.

4. *Quand deux surfaces du second ordre sont concentriques, leur développable circonscrite a une ligne de striction* (*réelle ou imaginaire*) *située à l'infini.*

Car le centre commun des deux surfaces a pour plan polaire dans les deux surfaces le plan situé à l'infini; et dans ce plan se trouve une des quatre lignes de striction de la développable (1).

Réciproquement, *quand la développable circonscrite à deux surfaces a une ligne de striction à l'infini, ces surfaces sont concentriques.*

Ce cas est, en particulier, celui des surfaces homofocales, comme on va le voir tout à l'heure.

5. Voici un théorème général fort important auquel il donne lieu :

Quand deux surfaces sont concentriques, si par une droite quelconque L *on mène deux plans conjugués par rapport aux deux surfaces* [*], *ces plans sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués d'une même troisième surface du second ordre déterminée d'espèce.*

Cette surface, si on la suppose concentrique aux proposées, a pour cône asymptote, le cône qui a pour sommet le centre commun des surfaces, et pour base la conique, ou ligne de striction, située à l'infini.

Quand la droite L est tangente aux deux surfaces, les deux plans conjugués sont les plans tangents à ces surfaces menés par les points de contact de la droite L.

Cette droite peut être tangente aux deux surfaces en un même point situé sur leur courbe d'intersection; les deux plans conjugués sont les plans tangents en ce point.

---

[*] Nous disons que deux plans sont *conjugués* par rapport à une surface quand le pôle de l'un est situé sur l'autre.

Surfaces homofocales.

6. Considérons la développable circonscrite à une surface du second ordre donnée A et à un cercle imaginaire situé a l'infini. Une infinité d'autres surfaces du second ordre seront inscrites dans cette développable, et toutes les surfaces seront concentriques, puisque la développable a une ligne de striction à l'infini.

Or, d'une part, tout cône ayant pour base un cercle imaginaire situé à l'infini, est, comme nous l'avons vu au sujet des coniques sphériques (art. 3), *le cône asymptote d'une sphère.*

Et, d'autre part, deux plans diamétraux conjugués d'une sphère sont rectangulaires. D'après cela, le théorème général qui précède donne lieu à celui-ci :

Quand deux surfaces du second ordre A, B *sont telles, que leur développable circonscrite ait pour une de ses lignes de striction un cercle imaginaire situé à l'infini, les deux plans conjugués par rapport aux deux surfaces, que l'on peut mener par une droite quelconque donnée* L, *sont toujours rectangulaires.*

Et en particulier, *les plans tangents aux deux surfaces menés par une même tangente commune quelconque, sont toujours rectangulaires.*

Par conséquent, *les deux surfaces se coupent partout à angle droit.*

7. On reconnaît, à cette dernière propriété, les surfaces *homofocales.* Ainsi un système de surfaces homofocales est simplement un système de surfaces inscrites dans une même développable; système qui ne se distingue de tout autre, qu'en ce que cette développable a pour une de ses lignes de striction un cercle imaginaire situé à l'infini.

Cette définition des surfaces homofocales est la plus concise, la plus nette et la plus féconde. Elle conduit avec une facilité extrême à une foule de propriétés de ces surfaces, que ne pouvait faire soupçonner la définition accoutumée, savoir, que ce sont des surfaces dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers. Une des plus importantes de ces propriétés est, sans nul doute, celle qu'exprime le théorème précédent [*].

[*] On en conclut notamment cette belle propriété que, *de quelque point de l'espace*

8. On sait que ce système de surfaces, qu'on a appelées depuis *homofocales*, a été considéré en premier lieu par M. Ch. Dupin, et qu'il tient une grande place dans le savant ouvrage qui a tant contribué, par les recherches neuves et importantes qu'il renferme et par la facilité des démonstrations, à répandre le goût des doctrines de la pure géométrie [*]. L'illustre auteur, que des considérations plus générales sur les lignes de courbure des surfaces d'ordre quelconque conduisaient à l'étude particulière de ce système de surfaces du second ordre, a bien reconnu que les deux sections coniques, ellipse et hyperbole qui figurent dans ce système, sont les limites des séries d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une et à deux nappes; que ce sont des surfaces infiniment aplaties, parce qu'un de leurs axes principaux est devenu nul [**].

Mais c'est à un autre point de vue que ces mêmes courbes nous représentent des surfaces limites infiniment aplaties, quand nous les considérons dans la développable circonscrite à toutes les surfaces, sur laquelle elles forment deux lignes de striction.

Ces courbes sont situées dans deux plans principaux des surfaces; une troisième, imaginaire, est située dans le troisième plan principal. Ces trois courbes et le cercle imaginaire situé à l'infini forment les quatre lignes de striction de la développable.

On ne peut parler des surfaces homofocales sans penser aux deux

---

que l'on considère deux surfaces homofocales, leurs contours apparents paraissent se couper à angle droit. D'où il résulte, d'après la théorie de Monge, *que ces deux surfaces forment les deux nappes lieux des centres de courbure d'une certaine surface unique* (voir *Aperçu historique*, p. 392). Premier exemple, et peut-être le seul jusqu'ici, de deux nappes ou surfaces que l'on reconnaît comme étant le lieu des centres de courbure d'une autre surface. Cette propriété des deux surfaces homofocales conduit naturellement, d'après la théorie même de Monge, à la considération des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre.

M. Liouville a donné l'équation différentielle de la surface, ou plutôt des surfaces parallèles qui ont leurs centres de courbure sur deux surfaces homofocales (voir *Journal de Mathématiques*, t. XVI, p. 6; année 1851).

[*] *Développements de Géométrie, etc.* Paris, 1813; in-4°.

[**] M. Binet est parvenu à des résultats semblables, dans un beau Mémoire de Géométrie et de Mécanique, sur la *Théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps*; voir *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX; 16e cahier, p. 41; année 1813.

célèbres théorèmes de Maclaurin et d'Ivory sur l'attraction des ellipsoïdes, et surtout aux belles recherches de M. Lamé sur la théorie de la chaleur, dans lesquelles ce système de surfaces orthogonales trouve les applications les plus heureuses dans l'étude des phénomènes physiques, comme dans les théories analytiques les plus relevées.

9. Mais on n'avait point encore étudié d'une manière spéciale les propriétés géométriques de ces surfaces, quand j'en ai fait le sujet d'un travail étendu, dont les résultats principaux se trouvent dans une des Notes de l'*Aperçu historique* (Note XXXI, p. 384-399 et p. 556).

Je me suis attaché alors à considérer ces surfaces comme formant la théorie qui, dans la géométrie à trois dimensions, correspond à celle des coniques homofocales sur le plan ou sur la sphère. Et à raison de cette analogie, d'après laquelle chacune des deux lignes de striction réelles dont il vient d'être question correspond à l'ensemble des deux foyers d'une conique, j'ai appelé ces courbes, les coniques *focales*, ou *excentriques* des surfaces du système. De très-nombreuses propositions ont constaté l'analogie ainsi entendue.

C'est dans ce même travail que se trouve pour la première fois cette propriété des surfaces homofocales, *d'être toutes inscrites dans une même développable;* propriété qui est la base d'une foule de conséquences.

10. Depuis, la question des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde m'a donné lieu de reconnaître que ces surfaces homofocales sont aussi importantes dans l'étude de ces lignes, qu'elles l'ont été dans la question des lignes de courbure. Il nous suffira de rappeler ici cette propriété fondamentale, que : *les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre sont toutes tangentes à une autre surface, homofocale à la première*. Et par suite, *les plans osculateurs de la ligne géodésique sont eux-mêmes tangents à la seconde surface* [*].

11. L'objet de la présente communication est de présenter un ensemble de propriétés des surfaces homofocales déduites immédiate-

[*] Voir *Comptes rendus*, t. XXII, année 1846; p. 63-72, 107-111, 313-318, 517-521.

ment de la considération du cercle imaginaire situé à l'infini, c'est-à-dire de ce cercle qui forme une des lignes de striction de la développable (imaginaire) circonscrite aux surfaces, et qui constitue le caractère propre et essentiel de cette développable.

Ces propriétés sont très-nombreuses; mais nous les comprendrons, comme nous avons fait pour les coniques sphériques, sous quatre théorèmes généraux, desquels il suffira de déduire les principales conséquences particulières.

Et quant à ces quatre théorèmes généraux, ils offrent un exemple bien remarquable de l'enchaînement qui existe entre toutes les parties d'une théorie, et de la possibilité souvent de les ramener toutes à un principe unique et très-simple : car ces théorèmes, quoique différents, se tirent d'une même proposition fondamentale concernant des surfaces d'un ordre quelconque. Voici l'énoncé de cette proposition, appliquée à des surfaces du second ordre :

Théorème fondamental. — *Quand quatre surfaces du second ordre* A, A′, B, B′ *sont telles, que les deux développables circonscrites à ces surfaces prises deux à deux, soient circonscrites à une même autre surface du second ordre : il en sera de même des deux développables circonscrites aux surfaces* A, A′, B, B′ *prises deux à deux d'une autre manière.*

Par exemple, si les développables $\boxed{AB}$, $\boxed{A'B'}$ sont circonscrites à une même surface U, les développables $\boxed{AA'}$, $\boxed{BB'}$ seront aussi circonscrites à une même surface.

Quatre théorèmes généraux sur les surfaces homofocales.

12. Théorème I. — *Étant données deux surfaces homofocales* A, A′ *et une autre surface quelconque* U; *si dans les deux développables* $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ *on inscrit deux surfaces quelconques* B, B′ : *la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite tout à la fois à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface homofocale à* U.

La première partie de cet énoncé est une application immédiate du théorème précédent.

Quant à la seconde partie, appelons C_i le cercle imaginaire situé à l'infini, que nous considérerons comme une surface du second ordre inscrite dans la développable $\boxed{AA'}$. Les deux développables $\boxed{UB}$ et $\boxed{A'C_i}$ sont circonscrites à une même surface A. Donc les développables $\boxed{BC_i}$ et $\boxed{UA'}$ ou $\boxed{UB'}$, qui est la même que $\boxed{UA'}$, sont circonscrites à une même surface (d'après le théorème fondamental). Et par suite (en vertu du même théorème), les deux développables $\boxed{BB'}$ et $\boxed{UC_i}$ sont circonscrites à une même surface. Mais toute surface inscrite dans la développable $\boxed{UC_i}$ est une surface homofocale à U (**7**). Le théorème est donc démontré.

13. THÉORÈME II. — *Étant données deux surfaces homofocales* A, A' *et une troisième surface quelconque* U, *si dans la développable* $\boxed{UA}$ *on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{UA'}$ *une surface* B' *homofocale à* B.

En effet, les deux développables $\boxed{UB}$ et $\boxed{A'C_i}$ sont circonscrites à la même surface A. Donc les deux développables $\boxed{UA'}$ et $\boxed{BC_i}$ sont circonscrites à une même surface. Mais toutes les surfaces inscrites dans la développable $\boxed{BC_i}$ sont homofocales à B (**7**); donc on peut inscrire dans la surface $\boxed{UA'}$ une surface homofocale à B.

C. Q. F. D.

14. THÉORÈME III. — *Étant données trois surfaces homofocales* A, A', A'' *et une quatrième surface quelconque* U; *si dans les développables* $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ *on inscrit deux surfaces* B, B' : *les deux développables* $\boxed{UA''}$ et $\boxed{BB'}$ *seront circonscrites à une même surface* B''.

En effet, les deux développables $\boxed{UB}$, $\boxed{A'A''}$ sont circonscrites à une même surface A. Donc les deux développables $\boxed{BA''}$ et $\boxed{UA'}$ ou $\boxed{UB'}$ sont circonscrites à une même surface. Donc les deux développables $\boxed{UA''}$ et $\boxed{BB'}$ sont circonscrites à une même développable.

C. Q. F. D.

15. Théorème IV. — *Quand trois surfaces quelconques* A, B, C *sont inscrites dans une même développable, si l'on décrit deux surfaces* A', B' *homofocales à* A *et à* B, *respectivement : on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{A'B'}$ *une surface homofocale à* C;

Et les deux développables $\boxed{ABC}$, $\boxed{A'B'C'}$ *seront circonscrites à une même surface* (du second ordre).

En effet, les deux développables $\boxed{BC}$, $\boxed{A'C_i}$ sont circonscrites à une même surface A; donc les deux développables $\boxed{CA'}$ et $\boxed{BC_i}$ ou $\boxed{B'C_i}$ sont aussi circonscrites à une même surface, et par conséquent aussi les deux développables $\boxed{CC_i}$ et $\boxed{A'B'}$. Or toute surface inscrite dans la développable $\boxed{CC_i}$ est homofocale à C. Donc la développable $\boxed{A'B'}$ est circonscrite à une surface homofocale à C : ce qui démontre la première partie du théorème.

Quant à la seconde partie, il suffit de remarquer que les deux développables $\boxed{AA'}$ et $\boxed{BB'}$ sont circonscrites à la surface C_i; car il en résulte que les deux développables $\boxed{AB}$ et $\boxed{A'B'}$ sont aussi circonscrites à une même surface. Donc, etc.

Conséquences du théorème I.

16. La surface U est une conique :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une conique* U *quelconque; si dans les développables* $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ *on inscrit deux surfaces* B, B′ : *la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite tout à la fois à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface qui aura pour focale la conique* U.

17. La conique U peut être infiniment aplatie et se réduire à une droite limitée à deux points u, u_1 :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ ; *si l'on circonscrit à chacune d'elles deux cônes ayant pour sommets deux points donnés* u, u_1, *et que dans les deux cônes circonscrits à* A *on inscrive une surface* B, *et dans les deux cônes circonscrits à* A′ *une surface* B′ : *la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une surface de révolution ayant pour foyers les deux points* u, u_1.

On peut prendre pour les surfaces A, A′ les deux focales d'une même surface.

18. Si la surface U est une sphère infiniment petite, ou réduite à un point :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′; *si on leur circonscrit deux cônes ayant leurs sommets en un même point* u *de l'espace, et que l'on conçoive deux surfaces* B, B′ *inscrites aux deux surfaces* A, A′, *respectivement, suivant toute l'étendue des courbes de contact des deux cônes : la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A *et* A′, *et à une sphère ayant son centre au point* u.

19. On peut prendre pour les deux surfaces B, B′ les courbes de contact des deux cônes. Ainsi :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ ; *si on leur circonscrit deux cônes ayant le même sommet : la développable circonscrite aux deux courbes de contact sera circonscrite à une surface homofocale aux proposées, et à une sphère ayant son centre au sommet commun des deux cônes.*

20. La surface U est inscrite à la surface A suivant une conique, et l'on prend pour la surface B le pôle de contact des deux surfaces.

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une surface* U *inscrite à* A *suivant une conique; si dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *on inscrit une surface* B′, *et que le pôle de contact des deux surfaces* U *et* A *soit pris pour le sommet d'un cône circonscrit à cette surface* B′ : *la courbe de contact sera sur deux surfaces tangentes à* B′ *suivant cette courbe, et dont l'une sera homofocale à* A *et* A′, *et l'autre sera homofocale à la surface* U.

21. On peut prendre pour la surface B′ une ligne de striction de la développable $\boxed{\mathrm{UA'}}$. Donc :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une surface* U *inscrite dans* A : *chaque ligne de striction de la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *est tout à la fois sur une surface homofocale à* A *et* A′, *et sur une surface homofocale à* U; *et ces deux surfaces sont inscrites dans le cône qui a pour base la ligne de striction et pour sommet celui du cône circonscrit à* U *et à* A *suivant leur courbe de contact.*

22. On prend pour la surface U dans le théorème **20** une conique tracée sur la surface A :

Étant données deux surfaces homofocales A, A′, *et sur la première une section plane* U ; *si dans la développable* $\boxed{\mathrm{UA'}}$ *on inscrit une surface* B′, *et que le sommet du cône circonscrit à* A *suivant la courbe* U, *soit pris pour le sommet d'un cône circonscrit à cette surface* B′ : *la courbe de contact sera sur deux surfaces inscrites ou circonscrites à ce cône suivant cette courbe, et dont la première sera homofocale à* A *et* A′, *et la deuxième aura pour focale la conique* U.

On peut prendre pour B′ une des lignes de striction de la développable $\boxed{\mathrm{UA'}}$ comme dans le théorème **21**.

23. Quand la surface U est une sphère, on peut la considérer comme

circonscrite au cercle imaginaire situé à l'infini, et prendre celui-ci pour la surface A; une surface B inscrite dans la développable $\boxed{UA}$ sera une sphère concentrique à U.

D'après cela, le théorème I donne lieu au suivant :

Étant données deux sphères concentriques U, B *et une surface quelconque* A'; *si l'on inscrit dans la développable* $\boxed{UA'}$ *une surface* B' : *la développable* $\boxed{BB'}$ *sera circonscrite à une surface homofocale à* A'.

24. On peut prendre pour la sphère B le centre de U. Donc :

Étant données une sphère U *et une surface* A', *si l'on inscrit dans la développable* $\boxed{UA'}$ *une surface* B', *et qu'on circonscrive à cette surface un cône qui ait son sommet au centre de la sphère* U : *la courbe de contact sera sur une surface homofocale à* A' *et tangente au cône suivant cette courbe.*

25. Qu'on prenne pour la surface B' une ligne de striction de la développable $\boxed{UA'}$; on en conclut que :

Quand une développable est circonscrite à une sphère et à une surface A' : *chacune de ses lignes de striction est située sur une surface homofocale à* A', *et le cône circonscrit à cette surface suivant cette courbe a son sommet au centre de la sphère.*

26. La surface U se réduit à une droite inscrite à la surface A, c'est-à-dire limitée à deux points u, u_1 de cette surface; alors la développable $\boxed{UA}$ est formée des plans tangents à A en ces deux points u, u_1. Si l'on prend pour la surface B la droite d'intersection de ces plans, il en résulte ce théorème :

Étant données deux surfaces homofocales A, A'; *et deux points* u, u₁ *de la première étant pris pour les sommets de deux cônes circonscrits*

à A'; *si l'on inscrit dans ces deux cônes une surface quelconque* B', *et que par la droite d'intersection des plans tangents à* A *en ses points* u, u_1, *on mène deux plans tangents à cette surface* B' : *les deux points de contact seront sur deux surfaces tangentes en ces points aux deux plans, et dont la première sera homofocale à* A *et* A', *et la seconde aura pour foyers les deux points* u, u_1.

On peut prendre pour la surface B' une des deux coniques suivant lesquelles se coupent les deux cônes.

Conséquences du théorème II.

27. La surface U est infiniment aplatie et devient une conique :

Etant données deux surfaces homofocales A, A' *et une conique* U; *si dans la développable* [UA] *on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans la développable* [UA'] *une surface homofocale à* B.

28. La conique U se réduit à une droite limitée à deux points u, u_1 : *Etant données deux surfaces homofocales* A, A', *à chacune desquelles on circonscrit deux cônes ayant leurs sommets en deux points donnés* u, u_1; *si dans les deux cônes circonscrits à la première surface on inscrit une surface* B : *on pourra inscrire dans les deux cônes circonscrits à la seconde surface une surface* B' *homofocale à* B.

29. Si les deux points u, u_1 s'approchent indéfiniment et coïncident, on en conclut que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A', *auxquelles on circonscrit deux cônes ayant le même sommet; si l'on inscrit à la première une surface* B *suivant la courbe de contact du premier cône : on pourra inscrire à la seconde, suivant la courbe de contact du second cône, une surface* B' *homofocale à* B.

30. Qu'on prenne pour la surface A une focale de A'; et pour le sommet des cônes un point du plan de cette courbe : on obtient ce théorème :

Etant données une surface A′ *et une de ses focales* A; *si l'on décrit une conique* B *qui ait deux points de contact avec cette conique* A : *on pourra inscrire dans la surface* A′ *une surface* B′ *ayant pour focale la conique* B; *le sommet du cône circonscrit à* A′ *et* B′ *suivant leur courbe de contact sera le point de rencontre des tangentes aux coniques* A, B *en leurs points de contact.*

31. On peut prendre pour la conique B une corde de la focale A; alors on dira que :

Etant données une surface A′ *et une de ses focales* A : *deux points de cette courbe sont les foyers d'une surface de révolution inscrite dans la surface* A′; *et le sommet du cône circonscrit à ces surfaces suivant leur courbe de contact est le point de concours des tangentes à la conique* A *menées par les deux points pris sur cette courbe* [*].

32. On peut prendre pour la surface B, dans le théorème **29**, la courbe de contact du premier cône; il en résulte que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′; *si on leur circonscrit deux cônes ayant le même sommet : la courbe de contact de la surface* A *sera la focale d'une surface inscrite dans* A′ *suivant la courbe de contact de celle-ci.*

33. La surface U est circonscrite à la surface A, et on prend pour B le pôle de contact. Il en résulte que :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une surface* U *inscrite dans la surface* A : *la développable* [UA′] *est circonscrite à une sphère qui a son centre au pôle de contact des deux surfaces* A *et* U.

34. La surface U peut être une conique tracée sur la surface A; donc :

Etant données deux surfaces homofocales A, A′ *et une conique* U

[*] J'ai eu occasion d'énoncer ce théorème dans une communication à l'Académie, déjà ancienne (voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1108; année 1843).

tracée sur A : *la développable* $\boxed{UA'}$ *est circonscrite à une sphère qui a son centre au sommet du cône circonscrit à* A *suivant la conique* U.

Cet énoncé n'est au fond qu'une réciproque du théorème **25**.

Conséquences du théorème III.

35. Supposons que la surface U se réduise à un point :

Étant données trois surfaces homofocales A, A′, A″; *si on leur circonscrit trois cônes ayant le même sommet, et que par les courbes de contact des deux premières* A, A′ *on mène deux autres surfaces* B, B′ *inscrites aux deux cônes respectifs : on pourra inscrire dans la développable* $\boxed{BB'}$ *une surface tangente à* A″ *suivant la courbe de contact du cône circonscrit à cette surface.*

On peut prendre pour les deux surfaces B, B′ les courbes de contact des cônes circonscrits aux deux surfaces A, A′.

Si l'on suppose que la surface A″ soit le cercle imaginaire situé à l'infini, on retrouve la seconde partie du théorème I.

Conséquences du théorème IV.

36. On peut prendre pour les surfaces A′, B′ des coniques focales des deux surfaces A et B; donc

Étant données trois surfaces A, B, C *inscrites dans une même développable; si l'on conçoit la développable circonscrite à deux des coniques focales des surfaces* A *et* B *respectivement : cette développable sera circonscrite à une surface homofocale à* C, *et à une surface inscrite dans la développable* $\boxed{ABC}$.

37. Si la surface C est une sphère, il s'ensuit que :

Quand deux surfaces A, B *sont inscrites dans une développable circonscrite à une sphère* C; *si l'on conçoit deux surfaces* A′, B′ *homofo-*

cales à ces surfaces, une à une respectivement : la développable $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite à une sphère concentrique à* C ;

Et les deux développables $\boxed{AB}$, $\boxed{A'B'}$ *seront circonscrites à une même surface.*

38. On peut supposer, comme ci-dessus (**36**), que les surfaces A′, B′ soient des focales des deux surfaces A, B. Donc

Quand deux surfaces A, B *sont inscrites dans une développable circonscrite à une sphère : la développable circonscrite à deux focales de ces surfaces est circonscrite à une deuxième sphère concentrique à la première ;*

Et les deux développables sont circonscrites à une même surface.

39. Si les deux surfaces A, B sont circonscrites l'une à l'autre, on peut prendre pour la surface C, soit leur pôle de contact, soit leur courbe de contact; il en résulte ce théorème :

Quand deux surfaces A, B *sont circonscrites l'une à l'autre suivant une conique, si l'on décrit deux autres surfaces* A′, B′ *qui leur soient homofocales, une à une respectivement : la développable* $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite tout à la fois à trois surfaces ; premièrement à une sphère ayant son centre au pôle de contact des deux surfaces* A *et* B ; *secondement à une surface ayant pour focale la courbe de contact de ces deux surfaces* A *et* B; *et troisièmement à une surface circonscrite à ces deux mêmes* A *et* B *suivant leur courbe de contact.*

40. Que l'on prenne pour la surface B une conique tracée sur la surface A; il en résulte ce théorème :

Quand on a deux surfaces homofocales A, A′, *et une conique* B *tracée sur la première* A ; *si l'on décrit une surface* B′ *qui ait cette conique pour focale : la développable* $\boxed{A'B'}$ *sera circonscrite à une sphère ayant*

son centre au sommet du cône circonscrit à A *suivant la conique* B; *et à une surface tangente à* A *suivant cette même conique* B.

41. On peut prendre pour la surface A′, dans ce théorème, la surface A; il en résulte que :

Quand une conique B *tracée sur une surface* A *est prise pour la focale d'une autre surface quelconque* B′, *la développable circonscrite aux deux surfaces* A *et* B′ *est circonscrite à une sphère qui a son centre au sommet du cône circonscrit à* A *suivant la conique* B.

ADDITION

A LA NOTE SUR CERTAINES ÉGALITÉS ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE $E(x)$, INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AOUT [*];

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je veux ajouter une égalité nouvelle aux deux égalités que j'ai données dans la Note indiquée (*voir* p. 287 et 288). Celle dont je veux parler aujourd'hui est plus compliquée, mais toujours dépendante de la fonction $E(x)$ qui marque l'entier contenu dans x. Elle offrira un troisième exemple d'une suite de propositions qui touchent à la théorie des formes quadratiques. L'égalité dont il s'agit se rapporte en effet à la forme $x^2 + 3y^2$, comme les deux précédentes à la forme $x^2 + y^2$.

Au premier membre figurera la différence des deux sommes

$$\sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right), \quad \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right):$$

α est une quantité positive donnée à volonté; les signes sommatoires portent sur r et sur s : on donne à r les valeurs successives 1, 7, 13, etc., tirées de la formule $6\mu + 1$, et à s les valeurs 5, 11, 17, etc., tirées de la formule $6\mu + 5$; dès qu'on dépasse α, on ne trouve plus que des zéros, et les séries s'arrêtent d'elles-mêmes. Ceci expliqué, je fais

$$A = \sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right) - \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right),$$

pour désigner le plus simplement possible la différence que j'ai en vue.

[*] Il y a une faute d'impression à corriger : page 288, ligne 15, au lieu de m, mettez n.

En second lieu, représentons par B et C les deux sommes respectives

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha - 3\varpi^2}\right), \quad \sum \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-\varpi^2}{3}}\right),$$

où ϖ prend les valeurs 2, 4, 6, 8, etc., formant la suite des nombres pairs en commençant à 2 et en s'arrêtant pour chaque somme au moment où le radical deviendrait imaginaire.

L'égalité que j'ai annoncée peut maintenant s'écrire :

$$\mathrm{A} = \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right) + 2(\mathrm{B}+\mathrm{C}) \text{ [*]}.$$

Soit, comme exemple, $\alpha = 27$: il viendra

$$\mathrm{A} = 14 + 2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 - 1 - 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = 13.$$

D'un autre côté, on trouve, pour cette valeur de α,

$$\mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right) = 3, \quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right) = 2$$

et

$$2(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = 2(2+1+1) = 8 :$$

le total $3 + 2 + 8$ faisant 13, notre égalité est vérifiée.

---

[*] On remarquera que α est une quantité positive quelconque. Nous aurions pu attribuer cette même signification étendue aux lettres m et n dans nos deux anciennes égalités, au lieu de supposer que m et n désignent des entiers, l'un impair, l'autre quelconque. Mais alors au lieu de dire (page 287) que les valeurs de s sont $1, 3, 5, 7, \ldots, m$, il aurait fallu dire de prendre $s = 1, 3, 5, 7, \ldots$, sans dépasser m, la série s'arrêtant d'elle-même dès qu'on a $s > m$.

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

(Suite.)

CHAPITRE VII.

De la série de Taylor.

91. Les deux questions, dont nous donnons la solution dans ce chapitre, ont pour objet, la première, de déterminer exactement la région de convergence de la série de Taylor, la seconde, de définir de telle sorte la valeur de la fonction, supposée multiple, qui se développe par la série, qu'on puisse la reconnaître parmi les racines de l'équation qui lie cette fonction à sa variable, et par conséquent l'obtenir par la résolution même de cette équation, au lieu de la calculer par la sommation des termes de la série.

Ainsi une fonction y étant définie par une équation algébrique entière

$$f(x, y) = 0,$$

qui donne m valeurs de cette fonction pour chaque valeur de la variable, nous nous proposons : 1° de déterminer pour chaque système de valeurs, x_0, y_0, de x et de y les limites dans lesquelles la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

restera convergente; 2° d'assigner à la valeur de y, représentée par la suite

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x_1 - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

supposée convergente, des caractères qui puissent permettre de la distinguer au milieu des racines de l'équation

$$f(x_1, y) = 0.$$

La série de Taylor ayant déjà donné lieu à un grand nombre de travaux, je les résume d'abord brièvement pour préciser le point où l'on était parvenu et proposer soit quelques modifications aux énoncés des théorèmes, soit des éclaircissements nouveaux.

92. M. Cauchy a démontré que la convergence d'une série

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

ne dépend que du module de x et non de la valeur de cette variable : de sorte que si x est représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et que R soit la limite que le module de x ne doive pas dépasser, la série restera convergente pour toute valeur de x satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 < R^2;$$

si l'on avait mis la série sous la forme

$$A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + \ldots,$$

la condition de convergence serait

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < R^2.$$

M. Cauchy exprime cette condition en disant que le point x, (α, β), ne doit pas sortir du cercle décrit d'un rayon R autour du point x_0, (α_0, β_0). Ce cercle est souvent désigné sous le nom de *cercle de convergence de la série*.

Comme je ne figure pas les valeurs de x de la même manière que

M. Cauchy, et que d'ailleurs j'associe toujours y à x, dans la représentation figurée, je donnerai le nom de *région de convergence* à la portion du plan que peut parcourir le point $[x, y]$ assujetti à satisfaire à l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots$$

dont le second membre resterait toujours fini.

93. Pour déterminer la région de convergence de la série, il suffisait de découvrir une valeur de x dont cette variable pût approcher indéfiniment, sans que la série cessât d'être convergente, et qu'elle ne pût dépasser, sans que la série devînt divergente.

La marche à suivre dans cette nouvelle recherche était facile à apercevoir : la valeur cherchée de x devait être une de celles pour lesquelles y prend des valeurs égales.

M. Cauchy a fondé ce nouveau principe sur de savants calculs; mais je crois qu'il suffisait d'observer que la série ne pouvant donner qu'une valeur de la fonction, et ne faisant d'ailleurs pas acception du chemin par lequel x serait parvenu de sa valeur initiale à sa valeur finale, devait nécessairement tomber dans un cas illusoire dès qu'on essayerait de dépasser un point où la fonction prenant deux ou plusieurs valeurs égales pourrait suivre ensuite des routes différentes.

A la vérité, en se maintenant dans cet ordre d'idées, on ne verrait pas pourquoi, au lieu de cesser simplement de représenter la fonction, la série deviendrait divergente au delà d'un point multiple [*].

Mais c'est qu'en réalité le développement d'une fonction, suivant

[*] M. Cauchy, par suite d'une manière que je crois fausse, comme je l'ai expliqué dans le chapitre précédent, d'entendre la continuité, admettait qu'au moment où la variable recevait la valeur de l'abscisse d'un des points multiples du lieu, la fonction pouvait, sans violer la loi de continuité, prendre indifféremment la marche de l'ordonnée d'une quelconque des branches réelles ou imaginaires partant de ce point multiple.

En adoptant ce principe, il fallait bien admettre que la série, de manière ou d'autre, cesserait de représenter la fonction au delà d'un point multiple.

Mais comment serait-elle, pour cela, devenue divergente, si à une distance infiniment

la série de Taylor, n'est aucunement arrêté par l'interposition d'un point multiple, quand ce point n'offre pas d'ailleurs de nouveaux caractères spéciaux.

Les observations qui ont été présentées dans le chapitre précédent devaient faire prévoir cette affirmation. Quelques mots suffiront pour la légitimer.

94. Si, au point multiple considéré, toutes les dérivées de y, par rapport à x, restent finies, quelque loin qu'on les prolonge, on pourra prendre ce point pour point de départ, et chacune des séries, suivant lesquelles se développeront les différentes formes de y, restera convergente dans un certain rayon : or ce rayon ne saurait évidemment repasser, sans transition, de sa valeur finie à zéro, lorsqu'on déplacera infiniment peu le point de départ.

Cela posé, il est facile de caractériser les points multiples où le développement ne saurait être arrêté.

Lorsqu'en un point multiple du lieu $f(x, y) = 0$ les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont distinctes, il n'y a pas de raison pour qu'aucune valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit infinie; de même si $\frac{dy}{dx}$ ayant au point multiple plusieurs valeurs égales, les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont cependant distinctes, celles de $\frac{d^3y}{dx^3}$ seront finies, et ainsi de suite. Les points multiples, qui ne forment pas obstacle au développement, sont donc ceux où les dérivées de la fonction finissent par se séparer sans devenir infinies.

---

petite du point multiple elle devait avoir une valeur finie, que l'on pouvait même rendre aussi petite qu'on l'eût voulu?

Le vice de la démonstration dont on a cherché à étayer cette croyance me paraît consister en ce que l'on a confondu la série avec la fonction.

On a décomposé la proposition en deux, l'une directe, où l'on établit que l'équation de y à la série représente un lieu n'ayant aucun point multiple; l'autre, réciproque, où l'on démontre que, tant que la fonction ne prend pas de valeurs multiples, le développement est possible.

Mais la série ne représentant, en général, qu'un segment de la fonction, je crois qu'il n'y avait aucune conclusion à tirer du rapprochement des deux propositions.

Ainsi le point double du lieu

$$y = x\sqrt{1+x}$$

n'arrêtera en aucun cas le développement de la fonction $x\sqrt{1+x}$; tandis que le point de rebroussement de la cissoïde

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

ne pourra jamais être franchi, et limitera la région de convergence si elle n'est bornée plus tôt au point $[x = 2a,\ y = \infty]$.

95. Cette théorie paraîtrait en défaut si l'on pouvait douter que les dérivées des mêmes ordres de l'ordonnée de la courbe, par rapport à l'abscisse, se retrouvassent toujours infinies aux mêmes points multiples, quels que fussent les axes auxquels on rapportât la courbe; car le rayon du cercle de convergence ne pouvant varier brusquement lorsqu'on changerait infiniment peu la direction de l'axe des y, les mêmes points multiples devront toujours présenter le même obstacle au développement de la fonction. Il importait donc de vérifier que la cause assignée à cet obstacle se représenterait toujours.

Un exemple suffira pour éclaircir ce point :

Supposons qu'il s'agisse d'un point double, où les deux tangentes se confondent; si l'on a pris ce point pour origine, l'équation de la courbe aura la forme

$$y^2 - 2\alpha xy + \alpha^2 x^2 + Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + \ldots = 0.$$

Cette équation donnera successivement

$$2(y-\alpha x)\frac{dy}{dx} - 2\alpha(y-\alpha x) + (3Ay^2 + 2Byx + Cx^2)\frac{dy}{dx}$$
$$+ By^2 + 2Cyx + 3Dx^2 + \ldots = 0$$

et

$$2(y-\alpha x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\alpha\frac{dy}{dx} + 2\alpha^2 + (3Ay^2 + 2Byx + Cx^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ (6Ay + 2Bx)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4(By + Cx)\frac{dy}{dx}$$
$$+ 2Cy + 6Dx + \ldots = 0.$$

Pour avoir la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point double considéré, il faudrait, dans cette dernière équation, remplacer $\frac{dy}{dx}$ par α et faire tendre y et x vers zéro, en maintenant entre eux le rapport α.

Or, en divisant les deux membres par x et faisant les substitutions indiquées, on reconnaît d'abord que les termes qui provenaient de la partie

$$y^2 - 2\alpha y x + \alpha^2 x^2$$

du premier membre de l'équation proposée, disparaissent d'eux-mêmes. D'un autre côté, les termes, qui proviennent de la partie

$$Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3,$$

se réduisent à

$$x(3A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\frac{d^2y}{dx^2} + 6(A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D);$$

et les autres termes peuvent être négligés comme contenant x à des puissances supérieures.

L'équation en $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit donc à

$$x(3A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\frac{d^2y}{dx^2} + 6(A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D) = 0;$$

par conséquent, à moins que $A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$ ne soit nul de lui-même, la dérivée seconde de y, par rapport à x, au point considéré, sera infinie.

Or la condition

$$A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D = 0$$

a un sens géométrique indépendant du choix des axes, elle signifie que la tangente au point double ne coupe plus la courbe qu'en $m - 4$ autres points, elle sera donc toujours satisfaite, ou bien elle ne le sera jamais. C'est assez dire que si $\frac{d^2y}{dx^2}$ a été une fois reconnu infini, il le sera toujours.

Des démonstrations analogues s'appliqueraient sans doute aux autres cas qu'on voudrait examiner.

96. En résumé, un point multiple ne peut arrêter le développement de la fonction qu'autant que les dérivées de cette fonction, sous quelques-unes de ses formes, y deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

Hormis ce cas, la série traversera sans embarras le point multiple, et toutes les dérivées de la fonction, après le passage, recevront de la série des valeurs infiniment peu différentes de celles qu'elles avaient auparavant. Elles n'auront subi aucune variation brusque.

Cela étant, on comprend très-bien que la série de Taylor ne puisse cesser de représenter la fonction qu'en devenant divergente.

Car, le développement ne pouvant plus être arrêté que par un point où soit la fonction, soit une de ses dérivées devienne infinie : si, en premier lieu, c'est la fonction qui doit devenir infinie, comme elle aura déjà pris des valeurs excessivement grandes un peu auparavant, la série, en réalité, ne deviendra divergente, que pour continuer de la représenter encore.

Tandis que si c'est une des dérivées de la fonction qui devient infinie, comme on sait qu'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est convergente ou divergente en même temps que toutes ses dérivées et intégrales : si l'on ne voit pas pourquoi la série, suivant laquelle on a développé la fonction, deviendrait infinie en un point singulier où cette fonction est encore finie, cependant les dérivées de cette série, à partir d'un certain ordre, devant, par hypothèse, devenir infinies en ce point, la série elle-même devra aussi le devenir.

On voit que, dans ce cas, l'objet lui-même eût pu être représenté d'autres manières, c'est le mode de représentation qui tombe en défaut.

97. Ce que nous venons de dire démontre une fois de plus que le développement de la fonction ne peut être limité qu'à l'un des points où soit la fonction, soit ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviennent infinies.

Ce nouvel énoncé du théorème de M. Cauchy s'accorde avec celui qu'avait donné M. Lamarle, dès 1846.

D'après M. Lamarle [*] :

« Toute fonction est développable en série convergente suivant la
» formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moin-
» dre que la plus petite des valeurs pour laquelle la fonction cesse
» d'être continue ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$,
» $\theta = 2\pi$ [**]. Hors de là la série devient divergente. »

Lorsqu'en un point multiple du lieu considéré les dérivées de la fonction finissent par se séparer sans devenir infinies, cette fonction ne saurait, sans violer la loi de continuité, prendre indifféremment une quelconque des valeurs voisines de l'ordonnée du point multiple : elle n'en peut recevoir qu'une pour chaque valeur de la variable, de sorte qu'elle reprend la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$; au contraire si la dérivée de l'ordre n d'une des formes de la fonction devient infinie en un point multiple, celle de l'ordre $n - 1$ peut prendre deux ou plusieurs valeurs différentes après le passage au point multiple, et la fonction elle-même, si elle est parvenue au point multiple sous l'une des formes permutables, ne reprend plus la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

A la vérité la condition qu'aucune dérivée de la fonction ne devienne infinie, me paraît offrir un sens plus net et devoir être d'un usage pratique plus commode que celle que la fonction reprenne la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Mais les deux énoncés s'accordent au fond.

Celui de M. Lamarle tenait donc compte, dans la mesure convenable, de la présence des points multiples du lieu en question.

J'ignore pourquoi dans les énoncés plus récents, qu'on a proposés du théorème de M. Cauchy, la distinction n'a pas été maintenue.

98. La dernière assertion qui termine l'énoncé de M. Lamarle se trouve reproduite en termes analogues dans tous les autres Mémoires que j'ai consultés :

La série devient nécessairement divergente dès qu'on essaye de dé-

---

[*] Voyez le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI, 1846.

[**] M. Lamarle représente la variable x par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

passer le premier point où la fonction prend une de ses valeurs singulières définies dans la première partie de l'énoncé.

Le fait serait bien évident si l'on supposait que ce fût la fonction, dont la valeur initiale concourt à la formation des coefficients de la série, qui fût venue prendre la valeur de l'ordonnée d'un point dangereux, au moment où la variable atteint celle de l'abscisse de ce point.

Mais, dans le cas contraire, il n'y a pas de raison pour que la série devînt divergente lorsqu'on voudrait dépasser cette valeur de x.

L'énoncé n'est donc pas clair par lui-même, et pourrait être exact ou inexact selon la manière dont on l'entendrait.

J'ai cherché à découvrir l'opinion de tous les auteurs à cet égard, mais il ne m'a pas toujours été possible d'y parvenir.

Je crois que l'on a toujours entendu l'énoncé en ce sens que le cercle de convergence ne devait contenir aucun des points $[a, b]$ correspondants aux valeurs de x pour lesquelles quelques valeurs de y deviennent égales (il faudrait ici reproduire toutes les manières d'entendre la proposition directe) ; mais cela importe moins que de savoir si le fait est exact.

Or l'hypothèse aurait pour conséquence immédiate que si y_1, $y_2, \ldots, y_m$ désignent les valeurs différentes que prend la fonction pour une même valeur x_0 de x, n'offrant aucun caractère exceptionnel, les séries

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$y_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots.$$

. . . .

$$y_m + \left(\frac{dy}{dx}\right)_m \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

seraient toutes convergentes dans le même cercle, bien que leurs coefficients diffèrent totalement.

Cette conclusion déjà répugne évidemment : il est bien plus probable en effet que chacune des séries aura sa région propre de convergence, ou que, du moins, elles se rangeront en quelques groupes dans cha-

cun desquels la région de convergence restera la même, en variant cependant d'un groupe à l'autre.

99. Pour rendre le fait complétement évident, supposons que x_0 soit une des valeurs de x auxquelles correspondent quelques valeurs singulières de y : que, par exemple, y_2 soit infini, que $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_3$ soit infini, etc., mais que y_1, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1$, $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_1$, etc., soient tous finis: la série

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

sera évidemment convergente dans un cercle de rayon fini, tandis que quelques-unes des autres ne seront convergentes pour aucune valeur de x.

Cela posé, que l'on déplace infiniment peu le point de départ, c'est-à-dire qu'on fasse varier infiniment peu x_0, la série dont le rayon de convergence était fini, restera convergente dans un rayon fini encore, dont la valeur même aura infiniment peu varié, tandis que celles qui n'étaient convergentes pour aucune valeur de x n'auront qu'un rayon de convergence infiniment petit.

Le cercle de convergence n'est donc pas le même pour toutes les séries considérées.

100. Ainsi se trouve posée la première des deux questions dont nous avons annoncé la solution au début de ce chapitre.

Toutes les valeurs de x, pour lesquelles la série reste convergente, sont celles qui satisfont à la condition que le module de la différence $x - x_0$ reste inférieur au module de la différence entre x_0 et l'abscisse de l'un des points où les dérivées de la fonction deviennent infinies à partir d'un certain ordre; mais il reste à déterminer celui de ces points qui, pour chaque système de valeurs de x_0 et de y_0, limite effectivement le développement.

La réponse à faire à cette question, pour suffire aux besoins de la pratique, devrait, s'il était possible, être formulée analytiquement; mais il paraît peu probable qu'on parvienne à la réduire à de tels termes.

Soient x_0, y_0 les valeurs initiales de la variable et de la fonction, et X, Y leurs valeurs particulières au point dangereux cherché : X dépendra à la fois de x_0 et de y_0, mais il dépendra surtout de la nature de la relation qui lie x et y, car si deux courbes se coupent en un point $[x_0, y_0]$, et ont d'ailleurs les mêmes points dangereux [X, Y], $[X_1, Y_1]$, etc., il n'y aura cependant pas de raisons pour que le même de ces points se trouve être le premier point d'arrêt pour les ordonnées des deux courbes qui partiraient dans les deux cas de la même valeur y_0. Au reste il ne s'agira pas seulement d'obtenir X, la détermination de Y sera également indispensable et pourra être même plus difficile, lorsque plusieurs points dangereux auront même abscisse.

Les conditions à remplir par X et Y ne pouvant être que des conditions d'inégalités, la méthode pour en obtenir les valeurs ne pourra évidemment consister qu'en des précautions à prendre pour ne pas les dépasser.

On pourra donc, le point dangereux, qui se rapporterait à un point de départ une fois choisi, devant se déplacer d'une manière continue, lorsque l'on fera tourner l'axe des y autour de l'origine; on pourra rendre d'abord réelle l'abscisse du point de départ en choisissant convenablement la direction de l'axe des y, déterminer alors le point le plus immédiatement dangereux; et, en ramenant ensuite l'axe des y à sa position primitive, suivre sur la courbe réelle ou sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées le mouvement de ce point dangereux.

Soit

$$\left[x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta_0 C_0\sqrt{-1}\right]$$

le point de départ : la conjuguée à laquelle appartient ce point touchera la courbe réelle en des points déterminés par la condition $\frac{dy}{dx} = C_0$; et l'enveloppe imaginaire en d'autres points où $\frac{dy}{dx}$ aura des valeurs m, m', etc., en général différentes de C_0, mais réelles.

Si l'on donnait à l'axe des y la direction $y = C_0 x$, les premiers de ces points, situés sur la courbe réelle, deviendraient les points dangereux, avec d'autres qui n'auraient pas rapport à la conjuguée considérée, et appartiendraient à l'enveloppe imaginaire; tandis que si l'on donnait à l'axe des y l'une des directions $y = mx$, $y = m'x$, etc., le

point correspondant de l'enveloppe imaginaire deviendrait un des points dangereux, avec d'autres ne se rapportant pas à la conjuguée considérée [*].

Quelle que soit la direction C_0 ou m, ou m', etc., qu'on donne à l'axe des y, ceux des points dangereux qui appartiendront à la même branche de la conjuguée C_0 que le point de départ, seront évidemment les plus dangereux; mais, parmi eux, si l'on a donné à l'axe des y la direction $y = C_0 x$, celui où la tangente serait la plus proche du point $[x_0, y_0]$, sera le plus immédiatement dangereux.

On aura donc aisément le point dangereux relatif au point de départ, au moment où l'axe des y serait parallèle aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient ce point de départ. Or en ramenant ensuite l'axe des y à sa première position, il sera facile de suivre sur la figure la marche de ce point dangereux.

101. On peut présenter cette solution d'une autre manière :

Lorsque les points dangereux sont sur la courbe réelle, ils appartiennent aussi à la conjuguée $C = \infty$; mais lorsqu'ils sont sur l'enveloppe imaginaire, ils peuvent appartenir à des conjuguées quelconques $C = m$, $C = m'$, etc. Supposons qu'on ait construit toutes ces conjuguées ainsi que la conjuguée à laquelle appartient le point de départ : le point mobile $[x, y]$, pour aller se rendre en l'un quelconque des points dangereux, devra avant tout se rendre sur une des conjuguées $C = \infty$, $C = m$, $C = m'$, etc., mais la branche sur laquelle est situé le point de départ, ne pouvant prendre que deux mouvements inverses l'un de l'autre, sera immédiatement comprise entre deux branches déjà construites des conjuguées $C = \infty$, $C = m$, $C = m'$, etc. : et il est clair que le point dangereux relatif au point de départ sera l'un de ceux qui se trouvent sur ces deux branches; le plus dangereux sera le plus rapproché.

Les exemples que nous traiterons achèveront de dissiper ce qu'il peut rester d'obscur dans ces explications.

---

[*] Le coefficient angulaire d'une droite ne peut devenir infini, par suite d'une transformation d'axes, qu'autant qu'il est réel : par conséquent, la dérivée de la fonction en un point ne peut devenir infinie que si elle est déjà réelle.

Dans ces exemples, comme dans tous ceux qu'on pourrait avoir à traiter, on arrivera à une certitude absolue en examinant si, dès que l'on admettrait que le point $[x, y]$ pût, sans que la série devînt divergente, venir se placer sur une des deux conjuguées dangereuses qui comprennent le point de départ $[x_0, y_0]$, il pourrait suivre cette conjuguée jusqu'au point dangereux qu'elle contient. Lorsqu'il en sera ainsi, et ce sera le cas général, ce point dangereux limitera évidemment la région de convergence, car pour aller joindre un autre point dangereux, il faudrait toujours que le point $[x, y]$ traversât la conjuguée en question, et s'il pouvait la traverser, il pourrait, à plus forte raison, d'après ce qu'on suppose, traverser le point dangereux qu'elle renferme, ce qui est toujours impossible. Au reste, lorsqu'une même conjuguée renfermera plusieurs points dangereux, ce qui arrivera fréquemment, le point $[x, y]$ pourra en général se rendre très-près de l'un d'eux, tandis qu'il devra rester à des distances finies des autres; le choix entre ces points sera déterminé par la simple comparaison des modules des différences entre x_0 et leurs abscisses.

102. Bien que la question que nous venons de traiter présentât un grand intérêt, on peut comprendre cependant qu'on ait pu se passer momentanément d'en avoir la solution exacte : comme on est toujours maître de disposer de l'écart que l'on fait subir à la variable, on eût pu même laisser les choses dans l'état où nous les avons trouvées, et se contenter de savoir que la série en tout cas resterait convergente au moins jusqu'au point dangereux le plus voisin du point de départ, c'est-à-dire, dont l'abscisse, retranchée de x_0, donnât le moindre module.

Mais on ne pouvait aborder la seconde question, qui doit nous occuper maintenant, et qui a par elle-même beaucoup plus d'importance, sans avoir préalablement résolu la première : il est évident, en effet, qu'il faudra connaître le rayon de convergence de la série avant de se demander ce qu'elle donnera tant qu'elle sera convergente.

La base générale de la méthode que nous proposerons pour arriver à connaître la valeur de la fonction qui se développe suivant la série, est fondée sur cette importante remarque que, quelque valeur qu'on donne à x, les m valeurs de y fournissent toujours des points séparés les uns des autres par une ou plusieurs conjuguées dangereuses, c'est-

à-dire passant par les points dangereux : ces conjuguées séparent le plan en cases dans aucune desquelles ne peuvent jamais se trouver en même temps deux points ayant même abscisse.

On trouverait la preuve du fait que nous avançons ici, dans les explications contenues au chapitre précédent. Mais nous n'insisterons pas, parce que notre affirmation est évidemment conforme à la théorie de M. Cauchy. En effet, le premier principe de cette théorie consiste en ce qu'une des valeurs de la fonction ne peut se permuter avec une autre qu'autant que le point x soit allé auparavant faire un tour autour d'un des points dangereux; or durant cette évolution le point $[x, y]$ aura passé au moins une fois sur une des conjuguées correspondantes.

Ainsi pour qu'un point $[x_1, y_1]$ aille se rendre en un autre point $[x_1, y_2]$, ayant même abscisse, il faut qu'il traverse au moins une des conjuguées dangereuses. C'est bien assez dire que les points

$$[x_1, y_1], [x_1, y_2], \ldots, [x_1, y_m],$$

sont toujours séparés les uns des autres par des conjuguées dangereuses.

103. Ce principe admis, il est aisé de prévoir que la série devra assigner, pour valeur finale, à la fonction, celle de l'ordonnée du point qui, pour revenir au point de départ, aurait le moins de conjuguées dangereuses à traverser.

Supposons d'abord que tous les points dangereux soient réels, que par conséquent les conjuguées dangereuses aient leurs abscisses réelles : il est évident que dans ce cas la région de convergence ne pourra couper, si encore elle la coupe, que la conjuguée dangereuse qui passerait par celui-là même des points dangereux qui fixe la limite de la région de convergence; le point final ne pourra donc se trouver que dans l'une ou l'autre des deux cases limitées à cette conjuguée dangereuse et à celles qui la comprennent immédiatement; par conséquent tout se réduira à savoir si le point mobile a changé ou non de case.

En effet, si la région de convergence pouvait rencontrer deux conjuguées dangereuses, elle en embrasserait des arcs terminés dans un sens et dans l'autre à des points ayant même abscisse réelle, puisque la

convergence de la série ne dépend que du module de x. Le point $[x, y]$ pourrait donc, sans sortir de la région de convergence, prendre successivement différentes ordonnées correspondantes à une même abscisse; ou bien, on pourrait sans sortir de la région de convergence amener la fonction à prendre successivement, pour une même valeur de la variable, des valeurs différentes, ce qui ne saurait être : dans ce cas donc il n'y a aucun doute possible, et l'on voit même que si le point $[x, y]$ peut se rendre sur une des branches de la conjuguée qui passe par le point dangereux situé sur la limite de la région de convergence, il ne pourra même pas, sans sortir de cette région, passer sur l'autre branche de la même conjuguée, qui passe au même point.

Au reste, pour savoir si le point $[x, y]$ a en effet traversé la branche de conjuguée sur laquelle on suppose qu'il pouvait se rendre, il suffira de comparer le signe de la partie imaginaire de la valeur finale de x au signe de la partie imaginaire de sa valeur initiale : suivant que β_0, β_1 sera négatif ou positif, le point $[x, y]$ aura ou non changé de case.

Supposons maintenant que le point dangereux, qui limite la région de convergence, soit imaginaire, ou, seulement, que le lieu proposé présente quelques points dangereux imaginaires.

A la vérité, je ne pense pas qu'on pût encore affirmer, dans ce cas, que le point $[x, y]$ ne pourra traverser qu'une seule conjuguée dangereuse. En effet, les points dangereux sont donnés par le système des équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$\frac{df}{dy} = 0,$$

l'une du degré m, l'autre du degré $m - 1$.

Or il peut se faire que toutes les solutions communes à ces deux équations fournissent effectivement les coordonnées de points où les dérivées de y deviennent infinies à partir d'un certain ordre; d'ailleurs il passera habituellement deux branches d'une même conjuguée par un même point dangereux; le nombre des cases peut donc dépasser de beaucoup le degré de l'équation proposée, par rapport à y; et en conséquence on ne voit pas pourquoi le point $[x, y]$ ne pourrait pas traverser une case tout entière, sans sortir de la région de convergence.

Mais, d'un autre côté, s'il peut traverser plusieurs conjuguées dangereuses, cela tiendra évidemment à ce que les cases correspondantes ne sauraient contenir des points ayant même abscisse, car autrement les ordonnées de ces points pourraient se permuter entre elles, dans l'intérieur de la région de convergence, ce qui est impossible.

La conclusion est donc toujours la même, quoique les faits soient alors plus difficiles à analyser.

Quand on aura calculé les valeurs de y qui correspondent à la valeur finale de x, quelles que soient les cases où se trouvent les points correspondants, il sera toujours possible de distinguer des autres celui qui n'est pas sorti de la région de convergence.

Quant à savoir du reste si le point $[x, y]$ aura ou non traversé l'une des conjuguées dangereuses que pourrait couper la région de convergence, ce sera toujours aisé : cette conjuguée n'ayant pas ses abscisses réelles, elles satisferont à une condition

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

qu'il faudra d'abord former : cela fait, on pourra affirmer que le point $[x, y]$ aura ou non traversé la conjuguée en question, suivant que

$$\varphi(\alpha_0, \beta_0) \times \varphi(\alpha_1, \beta_1),$$

sera négatif ou positif.

104. Lorsque le point dangereux, qui limiterait la région de convergence, sera imaginaire, il arrivera généralement que deux des valeurs de la fonction, qui correspondraient à une valeur de la variable suffisamment voisine de celle de l'abscisse du point dangereux, ne différeront plus l'une de l'autre que par le signe de la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$.

Pour choisir entre ces deux valeurs de la fonction, il suffira de savoir si le point $[x, y]$ a dû passer sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

Cette enveloppe étant caractérisée par une équation

$$\psi(\alpha, \beta) = 0,$$

qu'on aura formée à l'avance, on saura par le signe de

$$\psi(\alpha_0, \beta_0)\psi(\alpha_1, \beta_1)$$

si le point $[x, y]$ a en effet passé sur l'enveloppe imaginaire, c'est-à-dire si le signe de la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ a dû ou non changer, en passant du point $[x_0, y_0]$ au point final cherché.

105. Nous ne pouvions évidemment prétendre à prévoir ici tous les cas qui pourront se présenter et à les discuter par avance. Nous nous sommes donc borné à la discussion des circonstances les plus simples, par conséquent les plus générales du phénomène.

Chaque équation aura évidemment ses caprices, avec quoi il faudra compter à part.

Nous traiterons quelques exemples assez simples pour que les calculs soient praticables, mais qui permettent cependant de constater que la méthode existe bien réellement.

Si l'on s'en proposait de plus compliqués, les difficultés qu'ils présenteraient seraient, en tout cas, de celles que l'on sait résoudre avec de la patience : car s'il le fallait absolument, on pourrait toujours, comme dernière ressource, construire, au moyen des principes que nous avons posés dans le chapitre VI, la limite même de la région de convergence, ce qui assurément mènerait à une solution sans réplique de la question, puisqu'on ne pourrait alors s'empêcher de reconnaître celui des points fournis par les différentes valeurs de y, correspondantes à la valeur finale de x, qui se trouverait au dedans de la limite obtenue.

106. On a dû remarquer que c'est en rétablissant entre les différentes questions, qui nous ont occupé jusqu'ici, l'ordre de dépendance qui dérivait de leur nature même, que nous en avons rendu la solution accessible. Aussi, dès que la question qui faisait l'objet du chapitre précédent avait pu être traitée, toutes celles que comportait l'étude de la série de Taylor devaient évidemment pouvoir être abordées : et la complication seule des exemples pourra en effet mettre obstacle, par la longueur des calculs, à la solution des difficultés les plus inextricables.

Mais il nous reste à présenter une dernière remarque, qui, mieux que les explications qui précèdent, rendra compte de la méthode que nous avons adoptée.

Les démonstrations spéciales que nous aurons à présenter dans chaque cas, paraîtront peut-être tellement simples, qu'après avoir en quelque sorte renoncé à traiter la question, on sera au contraire maintenant tenté de la croire abordable par toutes les méthodes, ou même sans méthode spéciale.

Ce serait exagérer en sens contraire; en effet, ce n'est que parce que nous faisons toujours porter la discussion sur la caractéristique du point mobile, de préférence à toute autre variable réelle, que les faits sont toujours si faciles à analyser et les preuves si simples. Le choix de cette variable nous permet en quelque sorte de réduire l'étude du mouvement du point imaginaire à celle du mouvement du point réel situé sur la même conjuguée et sur la même branche, de façon que toutes les difficultés, qu'entraîne l'introduction de valeurs imaginaires attribuées aux variables, disparaissent, pour ainsi dire aussitôt, toutes les propriétés des points d'une même branche de conjuguée ne dépendant que de la place occupée sur la courbe réelle par le point où la touche cette branche de conjuguée.

THÉORÈME

CONCERNANT LE TRIPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $8\mu+3$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier $8\mu+3$, et considérons son triple $3m$. Le théorème que nous voulons donner ici, au sujet du produit $3m$, consiste en ce que l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$3m = 4x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier $(8\nu+5)$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du triple $(3m)$ d'un nombre premier m de la forme $8\mu+3$, on retranche, tant que faire se peut, les carrés 4, 36, 100, etc., des nombres impairement pairs, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\nu+5)$ qui ne divise pas y.

Soit comme exemple $m=3$, d'où $3m=9$. On aura

$$9 = 4.1^2 + 5.1^2.$$

Soit ensuite $m=11$, d'où $3m=33$. On aura de même

$$33 = 4.1^2 + 29.1^2,$$

où 29 est un nombre premier de la forme $8\nu+5$.

Soit en troisième lieu $m = 19$, d'où $3m = 57$. On pourra de 57 retrancher 4 et 36, d'où les deux restes 53 et 21 dont le premier seul est de la forme voulue; car $21 = 3 \times 7$, tandis que 53 (qui est un nombre premier $8\nu + 5$) donne lieu à l'équation canonique

$$57 = 4.1^2 + 53.1^2.$$

Soit encore $m = 43$, d'où $3m = 129$. En retranchant 4, 36 et 100 de 129, on aura ces trois restes 125, 93 et 29, dont le dernier est de la forme exigée. Notre théorème est donc vérifié. On le trouve exact aussi pour $m = 59$, et cette fois encore on n'a qu'une seule équation canonique, savoir

$$3.59 = 4.1^2 + 173.1^2.$$

Mais pour $m = 67$, on en a trois :

$$3.67 = 4.1^2 + 197.1^2,$$
$$3.67 = 4.5^2 + 101.1^2,$$
$$3.67 = 4.7^2 + 5.1^2.$$

Il serait inutile d'ajouter d'autres exemples.

FIN DU TOME CINQUIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut



